Übungsaufgabe

Grundlagen der komplexen Funktionen: Analytische Funktionen, Holomorphie und Cauchy-Riemann

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Analysis III für Ingenieure

Aufgabe 1: Grundlagen der analytischen Funktionen, Holomorphie und Cauchy-Riemann

Betrachten Sie Funktionen f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktion holomorph ist bzw. wann die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind.

a) Betrachten Sie $f(z) = z^2$. Geben Sie die Real- und Imaginärteile $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an, prüfen Sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

und bestimmen Sie, ob f holomorph ist (in welchem Bereich).

b) Betrachten Sie $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Geben Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an, prüfen Sie CR, und beurteilen Sie, ob f holomorph ist (in welchem Bereich).

c) Betrachten Sie $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Geben Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an, prüfen Sie CR, und bestimmen Sie, ob f holomorph ist (in welchem Bereich). Geben Sie ggf. auch eine Form der Ableitung $f'(z)$ an, falls Sie zu einem Schlusse gelangen.

Aufgabe 2: Beispiele und Grenzen der Holomorphie

Untersuchen Sie weitere konkrete Beispiele hinsichtlich der Cauchy-Riemann-Gleichungen und der Holomorphie.

a) Sei $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i \cdot 0$. Geben Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an, prüfen Sie CR und bestimmen Sie, ob f holomorph ist. Diskutieren Sie insbesondere, ob CR in einem Gebiet um einen Punkt erfüllt ist.

b) Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Erkennen Sie, um welche komplexe Funktion es sich handelt, prüfen Sie CR und diskutieren Sie die Holomorphie auf ganz $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3: Definition der Holomorphie über den Grenzwert

Betrachten Sie Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch deren Grenzwertbildung und kontrollieren Sie die Existenz der komplexen Ableitung an einem Punkt.

a) Für $f(z) = z^2$ bestimmen Sie die komplexe Ableitung $f'(z)$ sowohl durch CR (sofern anwendbar) als auch durch die Definition der Ableitung

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

und diskutieren Sie die Existenz dieses Grenzwertes in beliebigen Richtungen.

b) Betrachten Sie $f(z) = \overline{z}$. Untersuchen Sie, ob der obige Grenzwert existiert und ob er von der Richtung des h-Annäherung abhängt. Diskutieren Sie das Ergebnis im Kontext der Holomorphie.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Grundlagen der analytischen Funktionen, Holomorphie und Cauchy-Riemann

a) $f(z) = z^2$.

$$z = x + iy$$
$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

daher

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy.$$

Berechnung der Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$u_x = 2x, \quad v_y = 2x; \qquad u_y = -2y, \quad -v_x = -2y.$$

Da $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten, sind die CR-Gleichungen erfüllt. Da zudem alle partiellen Ableitungen stetig sind, folgt daraus, dass f ganzalgebrisch (holomorph) auf $\mathbb{C}$ ist. Das Ableitungs-Verhalten ergibt sich direkt:

$$f'(z) = 2z \quad (\text{für alle } z \in \mathbb{C}).$$

b) $f(z) = \overline{z} = x - iy$.

$$u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = -y.$$

CR-Gleichungen:

$$u_x = 1, \quad v_y = -1; \qquad u_y = 0, \quad -v_x = 0.$$

Der erste CR-Gleichungsteil $u_x = v_y$ ist nicht erfüllt, da $1 \neq -1$. Damit ist f weder holomorph noch in irgendeinem Gebiet holomorph. (Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ ist anti-holomorph, d.h. sie erfüllt CR-Gleichungen in der modifizierten Form, aber nicht die regulären CR-Gleichungen.)

c) $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y.$$

CR-Gleichungen:

$$u_x = e^x \cos y, \quad v_y = -e^x \sin y; \quad u_y = -e^x \sin y, \quad -v_x = -e^x \sin y.$$

Es gilt also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Somit ist f holomorph auf $\mathbb{C}$. Die Ableitung erhält man direkt als

$$f'(z) = e^z \quad (\text{für alle } z \in \mathbb{C}).$$

Lösung zu Aufgabe 2: Beispiele und Grenzen der Holomorphie

a) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i \cdot 0$.

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \qquad v(x,y) = 0.$$

CR-Gleichungen:

$$u_x = 2x, \quad v_y = 0; \qquad u_y = 2y, \quad -v_x = 0.$$

Diese Gleichungen gelten nur im Spezialfall $x = 0$ und $y = 0$ simultan. Insbesondere gilt keine offene Umgebung um einen Punkt, in der CR vollständig erfüllt wäre. Folglich ist f weder holomorph auf irgendeinem Gebiet noch auf ganz $\mathbb{C}$. Es bleibt jedoch der differentiierbare Punkt zentriert bei $z = 0$: Der Grenzwert

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{h} = 0,$$

existiert und ist unabhängig von der Richtung von h. Damit existiert der komplexe Ableitungsstammpunkt nur bei $z = 0$ (mit $f'(0) = 0$); keine Holomorphie in einer Umgebung von irgendeinem Punkt.

b) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Hier entspricht (u, v) den Real- bzw. Imaginärteilen von $f(z) = z^3$. CR-Gleichungen:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2; \qquad u_y = -6xy, \quad -v_x = -6xy.$$

Damit gelten CR-Gleichungen überall. Da die partiellen Ableitungen stetig sind, folgt Holomorphie auf ganz $\mathbb{C}$. Die Ableitung ist

$$f'(z) = 3z^2.$$

Lösung zu Aufgabe 3: Definition der Holomorphie über den Grenzwert

a) $f(z) = z^2$. Nach Definition der komplexen Ableitung

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2z + h) = 2z,$$

unabhängig von der Richtung von h. Damit existiert der Grenzwert für alle $z \in \mathbb{C}$ und f' ist gegeben durch $f'(z) = 2z$. Gleichzeitig bestätigen CR (siehe Aufgabe 1a) die Holomorphie auf ganz $\mathbb{C}$.

b) $f(z) = \overline{z}$. Berechnung über Definitionsgrenzwert:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Dieser Grenzwert hängt von der Annäherungsrichtung von h ab (z. B. $h \in \mathbb{R}_{>0}$ liefert 1, $h \in i\mathbb{R}_{>0}$ liefert -1). Folglich existiert der Grenzwert nicht. Somit existiert der komplexe Ableitungsgrenzwert nicht an irgendeinem Punkt und f ist nicht holomorph (und in der Tat anti-holomorph).