Übungsaufgabe

Differentialgleichungen: Grundlagen, Anfangs- und Randwertprobleme

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialgleichungen

Betrachten Sie lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen sowie einfache Beispiele von Anfangs- bzw. Randbedingungen.

a) Ordnung, Linearität und Homogenität Bestimmen Sie Ordnung, Linearität und Homogenität der folgenden DGLs und klassifizieren Sie sie entsprechend:

$$y'(t) + 3\,y(t) = e^t,$$

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 5\,y(t) = 0,$$

$$\big(y'(t)\big)^2 + y(t) = t.$$

b) Anfangs- bzw. Randwertprobleme Geben Sie zu jeder Gleichung ein passendes Anfangs- bzw. Randwertproblem an:

Für die Gleichung $y'(t) + 3\,y(t) = e^t$: $\quad y(0) = 2.$

Für die Gleichung $y''(t) - 4\,y'(t) + 5\,y(t) = 0$: $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Für die Gleichung $\big(y'(t)\big)^2 + y(t) = t$: $\quad y(0) = 0.$

Aufgabe 2: Anfangs- und Randwertprobleme

Untersuchen Sie typische Aufgabenstellungen zu Anfangs- und Randwertproblemen.

a) Anfangsproblem: Lösen Sie das Anfangsproblem

$$y'(t) + 2\,y(t) = e^{-t}, \qquad t \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

b) Randwertproblem: Betrachten Sie das Randwertproblem

$$y''(t) - y(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi],$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

c) Randwertproblem mit Eigenwertstruktur (Sturm–Liouville-Typ): Lösen Sie das Randwertproblem

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

mit

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Aufgabe 3: Randwert- und Eigenwertaufgaben

In dieser Aufgabe werden typische Randwert- und Eigenwertaufgaben behandelt.

a) Eigenwerte eines linearen Systems: Betrachten Sie das lineare System

$$x'(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und kommentieren Sie die Stabilität des Gleichgewichtspunktes $x = 0$.

b) Randwert-Eigenwertproblem (Sturm–Liouville-Typ): Betrachten Sie

$$y''(x) + \lambda\,y(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie alle zulässigen Werte von λ (Eigenwerte) und die entsprechenden Eigenfunktionen.

Lösungen

Aufgabe 1: Grundlagen der Differentialgleichungen

Lösung zu 1a: Bestimmung der Ordnung, Linearität und Homogenität der gegebenen DGLs.

- Für die Gleichung
$$y'(t) + 3\,y(t) = e^t,$$
  - Ordnung: 1 (höchster Ableitungsterm ist y').
  - Linearität: linear in y und y'; es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung.
  - Homogenität: nicht homogen, da die rechte Seite ungleich Null ist (RHS e^t).
- Für die Gleichung
$$y''(t) - 4\,y'(t) + 5\,y(t) = 0,$$
  - Ordnung: 2.
  - Linearität: linear in y und seinen Ableitungen.
  - Homogenität: homogen, da die rechte Seite Null ist.
- Für die Gleichung
$$\big(y'(t)\big)^2 + y(t) = t,$$
  - Ordnung: 1 (höchste Ableitung y').
  - Linearität: nicht linear (Term $(y')^2$).
  - Homogenität: nicht homogen (RHS $t \neq 0$).

Lösung zu 1b: Anzugeben sind je Gleichung passende Anfangs- bzw. Randbedingungen.

- Für die Gleichung $y'(t) + 3\,y(t) = e^t$: $\quad y(0) = 2.$
- Für die Gleichung $y''(t) - 4\,y'(t) + 5\,y(t) = 0$: $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
- Für die Gleichung $\big(y'(t)\big)^2 + y(t) = t$: $\quad y(0) = 0.$

Aufgabe 1: Lösung der jeweiligen Gleichungen

Lösung zu 1a (fortgeführt):

- Für $y'(t) + 3\,y(t) = e^t$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y(0) = 2$ lautet

  $$y(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

  Dieser Ausdruck erfüllt $y'(t) + 3y(t) = e^t$ und $y(0) = 2$.

Lösung zu 1b (fortgeführt):

- Erste Gleichung mit $y'(t) + 3\,y(t) = e^t$, $y(0) = 2$:

  $$y(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-3t}.$$

- Zweite Gleichung $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$: Das charakteristische Polynom

  $$r^2 - 4r + 5 = (r-2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \pm i.$$

  Allgemeine Lösung: $y(t) = e^{2t}\big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\big)$. Mit $y(0) = 1$ folgt $C_1 = 1$. Aus $y'(t) = e^{2t}\big[(2C_1 + C_2)\cos t + (2C_2 - C_1)\sin t\big]$ ergibt $y'(0) = 2C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$. Endlösung:

  $$y(t) = e^{2t}\big(\cos t - 2\sin t\big), \quad t \geq 0.$$

- Dritte Gleichung $\big(y'(t)\big)^2 + y(t) = t$, $y(0) = 0$: Aus der Bedingung am Anfang folgt

  $$(y'(0))^2 + y(0) = 0 \;\Rightarrow\; (y'(0))^2 = 0 \;\Rightarrow\; y'(0) = 0.$$

  Setze $p(t) = y'(t)$. Dann gilt

  $$p(t)^2 + y(t) = t \quad \Rightarrow \quad y(t) = t - p(t)^2.$$

  Differentiation liefert $p(t) = y'(t) = 1 - 2\,p(t)\,p'(t)$, also $p'(t) = \frac{1-p(t)}{2p(t)}$ (für $p(t) \neq 0$). Trennung und Integration:

  $$\frac{2p}{1-p}\,dp = dt \quad \Rightarrow \quad t = -2\ln|1-p| + 2(1-p) + C.$$

  Mit $p(0) = y'(0) = 0$ folgt $C = -2$ und

  $$t = -2\big(\ln(1-p) + p\big), \quad \text{bzw. } \ln(1-p) + p = -\frac{t}{2}.$$

  Die Lösung wird durch die stets eindeutige Zuordnung von p zu t gegeben, und

  $$y(t) = t - p(t)^2, \quad p(t) \text{ erfüllt } \ln(1-p(t)) + p(t) = -\frac{t}{2},\; p(t) < 1.$$

  Eine äquivalente Darstellungsform ist die parametrisierte Form mit Parameter p:

  $$t(p) = -2\big(\ln(1-p) + p\big), \qquad y(p) = t(p) - p^2,$$

  wobei $p < 1$. Diese Darstellung liefert (lokal) eine Lösung ab $t = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 2: Anfangs- und Randwertprobleme

Lösung zu 2a: Gegebenes Anfangswertproblem

$$y'(t) + 2\,y(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

Lösungsweg: Integrationsfaktor $\mu(t) = e^{2t}$.

$$\frac{d}{dt}\big(e^{2t}y(t)\big) = e^{2t}e^{-t} = e^{t}.$$

Integration liefert

$$e^{2t}y(t) = e^{t} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

Mit $y(0) = 0$ folgt $1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$. Also

$$\boxed{y(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0.}$$

Lösung zu 2b: Randwertproblem

$$y''(t) - y(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Lösungsteil: Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h'' - y_h = 0$ ist

$$y_h(t) = Ae^{t} + Be^{-t}.$$

Partikuläre Lösung: Versuchsform $y_p = a\sin t + b\cos t$. Es gilt

$$y_p'' - y_p = (-a\sin t - b\cos t) - (a\sin t + b\cos t) = -2a\sin t - 2b\cos t.$$

Damit $-2a\sin t - 2b\cos t = \sin t$ liefert $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Also

$$y(t) = Ae^{t} + Be^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

Anwendung der Randbedingungen:

$$y(0) = A + B - \frac{1}{2}\sin 0 = A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -A.$$

$$y(\pi) = Ae^{\pi} + Be^{-\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi = A(e^{\pi} - e^{-\pi}) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Somit

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}\sin t, \quad t \in [0, \pi].}$$

Lösung zu 2c: Randwertproblem mit Randwertstruktur

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

mit

$$y(0) = 0, \quad y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung $y'' + y = 0$ ist

$$y(t) = A\cos t + B\sin t.$$

Anwendung der Randbedingungen:

$$y(0) = A = 0 \Rightarrow y(t) = B\sin t.$$

$$y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = B\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = B = 1.$$

Daraus folgt

$$\boxed{y(t) = \sin t, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

Aufgabe 3: Randwert- und Eigenwertaufgaben

Lösung zu 3a: Gegebenes lineares System

$$x'(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte von A durch $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\boxed{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.}$$

Stabilitätskommentar: Beide Eigenwerte sind negativ, also ist der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ asymptotisch stabil. Die zugehörigen Eigenvektoren (als Potenziale der Linearisierung) sind z. B.

$$\lambda = -1: \; v^{(1)} = (1, -1)^T, \qquad \lambda = -2: \; v^{(2)} = (1, -2)^T.$$

Lösung zu 3b: Randwert-Eigenwertproblem (Sturm–Liouville-Typ)

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Gesucht sind Eigenwerte λ und zugehörige Eigenfunktionen y.

Fall $\lambda > 0$: Setze $\lambda = \mu^2$ ($\mu > 0$). Allgemeine Lösung

$$y(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x).$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $A = 0$. Dann $y(x) = B\sin(\mu x)$. Die Randbedingung $y(\pi) = 0$ liefert $\sin(\mu\pi) = 0 \Rightarrow \mu\pi = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Also

$$\lambda_n = \mu^2 = n^2, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Fall $\lambda = 0$ oder $\lambda < 0$ führt zu triviale oder nicht-sinnvolle Eigenfunktionen unter den Randbedingungen; daher werden hier nur die positiv definierten Eigenwerte betrachtet.

Damit:

$$\boxed{\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.}$$