Übungsaufgabe

Randwert- und Eigenwertaufgaben bei linearen ODEs: Sturm-Liouville-Probleme, Eigenfunktionen, Orthogonalität

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Randwert- und Eigenwertaufgaben bei linearen ODEs – Sturm-Liouville-Probleme

Betrachten Sie das allgemeine Randwertproblem der Sturm-Liouville-Form

$$-(p(x)y')' + q(x)y \;=\; \lambda\, w(x)y \quad \text{für } x \in (a, b),$$

mit geeigneten Randbedingungen. Im Folgenden verwenden Sie explizit

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1, \quad a = 0, \quad b = L$$

und die Dirichlet-Randbedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(L) = 0.$$

a) Schreibe das gegebene Problem in die Standardform

$$-(p(x)y')' + q(x)y \;=\; \lambda\, w(x)y$$

und identifiziere p(x), q(x), w(x) sowie die Randbedingungen. Begründe, dass es sich um ein reguläres Sturm-Liouville-Problem handelt.

b) Bestimme formell die Eigenwerte λ_n und die zugehörigen Eigenfunktionen $y_n(x)$, die die Randbedingungen erfüllen. Gib die allgemeine Struktur an (ohne vollständige Herleitung).

c) Zeige, dass die Eigenfunktionen $\{y_n\}$ zueinander orthogonal bezüglich des Gewichts $w(x) = 1$ sind:

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx \;=\; 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

d) Formuliere eine orthonormierte Basis der Eigenfunktionen auf $[0, L]$ mit dem Gewicht $w(x) = 1$, und gib die Normalisierungskonstante an. Schreibe die orthonormierten Funktionen $\phi_n(x)$.

Aufgabe 2: Randwert- und Eigenwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen

Betrachten Sie das gleiche Sturm-Liouville-Problem

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y \quad \text{auf } x \in (0, L),$$

mit $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$ und gemischten Randbedingungen

$$y'(0) = h_0\, y(0), \qquad y'(L) = -h_L\, y(L),$$

mit Parametern $h_0, h_L \geq 0$.

a) Diskutiere, welche Eigenschaften das Randproblem bezüglich Selbstadjungheit und Spektrum hat. Welche Rolle spielen die Randbedingungen für Orthogonalität der Eigenfunktionen?

b) Leite die Bedingung ab, die die Eigenwerte λ_n bestimmt (Transzendentale Gleichung im Allgemeinen). Skizziere eine numerische Vorgehensweise zur Bestimmung der ersten paar Eigenwerte.

c) Zeige, dass die zugehörigen Eigenfunktionen $\{y_n\}$ orthogonal bezüglich des Gewichts $w(x) = 1$ sind:

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx \;=\; 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Erörtere außerdem eine geeignete Normierung.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Randwert- und Eigenwertaufgaben bei linearen ODEs – Sturm-Liouville-Probleme

a) Standardform und Regularität Im gegebenen Randwertproblem

$$-(p(x)y')' + q(x)y \;=\; \lambda\, w(x)y \quad \text{für } x \in (a,b),$$

mit $p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ w(x) = 1,\ a = 0,\ b = L$ und Dirichlet-Randbedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(L) = 0,$$

liegt die Gleichung in der Standardform eines regulären Sturm-Liouville-Problems vor. Tatsächlich gilt: - $p(x) = 1 > 0$ auf $[0, L]$, - $q(x) = 0$ und $w(x) = 1$ sind stetig auf $[0, L]$, - die Randbedingungen sind separierbar (hier Dirichlet).

Daraus folgt, dass es sich um ein reguläres Sturm-Liouville-Problem handelt, das eine reelle Spektrum besitzt und eine vollständige Basis von Eigenfunktionen liefert.

b) formale Bestimmung der Eigenwerte λ_n und zugehöriger Eigenfunktionen Gesucht sind $\lambda > 0$ und $y \neq 0$ mit

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Setze $k = \sqrt{\lambda} > 0$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx).$$

Die Bedingung $y(0) = 0$ liefert $A = 0$, also

$$y(x) = B\sin(kx).$$

Die Randbedingung $y(L) = 0$ verlangt $\sin(kL) = 0$, d.h. $kL = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgen

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \geq 1.$$

c) Orthogonalität der Eigenfunktionen bezüglich des Gewichts $w(x) = 1$ Für $m \neq n$ gilt

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Begründung (Standard-Identity): Mit

$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$$

und $\alpha = \frac{m\pi x}{L},\ \beta = \frac{n\pi x}{L}$ erhält man

$$\int_0^L y_m y_n\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

d) Orthogonalität/Normalisierung – Bildung einer orthonormierten Basis Die Norm der n-ten Eigenfunktion ist

$$\|y_n\|^2 = \int_0^L y_n(x)^2\, dx = \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}.$$

Daraus ergeben sich die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\phi_n(x) = \frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

und die Monotonie der Orthogonalität bleibt erhalten:

$$\int_0^L \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn}.$$

Lösung zu Aufgabe 2: Randwert- und Eigenwertaufgaben mit gemischten Randbedingungen

a) Selbstadjungiertheit und Spektrum Betrachte das verallgemeinerte Randwertproblem

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda\, w(x)y \quad \text{auf } x \in (0, L),$$

mit $p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ w(x) = 1$ und gemischten Randbedingungen

$$y'(0) = h_0\, y(0), \qquad y'(L) = -h_L\, y(L),$$

mit Parametern $h_0, h_L \geq 0$.

Begründung der Selbstadjungiertheit (Skizze): Für y, z aus dem Definitionsbereich (mit den genannten Randbedingungen) gilt

$$\int_0^L (Ly)z\, dx = -\int_0^L y''z\, dx = \int_0^L y'z'\, dx + \big[h_L y(L)z(L) + h_0 y(0)z(0)\big].$$

Wechsle die Rollen von y und z und nutze dieselben Randbedingungen, erhält man

$$\int_0^L y(Lz)\, dx = \int_0^L y'z'\, dx + \big[h_L y(L)z(L) + h_0 y(0)z(0)\big].$$

Damit folgt $\int_0^L (Ly)z\, dx = \int_0^L y(Lz)\, dx$ für alle $y, z \in D$; hence L ist selbstadjungiert. Da es sich um ein reguläres Sturm-Liouville-Problem handelt (endliche Intervalllänge, p>0, q,w reell, Randbedingungen separiert), besitzt das Problem ein reelles, diskretes Spektrum, und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden eine vollständige Basis von $L^2(0, L)$ mit Gewicht $w \equiv 1$. Insbesondere gilt: - Eigenwerte λ_n sind real, eindimensional und eindeutig (simplicity) sowie $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$, - Eigenfunktionen $\{y_n\}$ sind paarweise orthogonal:

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n),$$

und können auf Wunsch normiert werden.

b) Bedingung, die die Eigenwerte λ_n bestimmt (transzendentale Gleichung) und numerische Vorgehensweise Löse die Gleichung

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = h_0 y(0), \quad y'(L) = -h_L y(L).$$

Setze $k = \sqrt{\lambda} > 0$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx).$$

Aus $y'(0) = h_0 y(0)$ folgt $Bk = h_0 A$ bzw. $B = \frac{h_0}{k} A$. Dann gilt

$$y(L) = A\cos(kL) + B\sin(kL), \quad y'(L) = -Ak\sin(kL) + Bk\cos(kL).$$

Die Randbedingung $y'(L) = -h_L y(L)$ führt letztlich auf die transzendentale Gleichung

$$F(k) = (h_0 h_L - k^2)\sin(kL) + k(h_0 + h_L)\cos(kL) = 0,$$

wobei $\lambda = k^2$ ist.

Numerische Bestimmung der ersten paar Eigenwerte: - Konstruiere $F(k)$ mit $k > 0$ und suche Nullstellen. - Näherungen: Für große n liegt die Null nahe $k_n \approx \frac{n\pi}{L}$. Verwende eine Bracketing-Methode (z. B. Bisection) in Intervallen, die zwischen aufeinanderfolgenden Vierecksgrenzen liegen, z. B. $[(n-1)\pi/L, n\pi/L]$. Prüfe jeweils das Vorzeichenwechsel-Verhalten von $F(k)$ in einem Intervall; liegt dort ein Vorzeichenwechsel vor, liegt dort eine Nullstelle. - Verfeinere mit Newton-Iteration:

$$k_{j+1} = k_j - \frac{F(k_j)}{F'(k_j)},$$

mit

$$F'(k) = -2k\sin(kL) + (h_0 h_L - k^2)L\cos(kL) + (h_0 + h_L)\cos(kL) - L(h_0 + h_L)k\sin(kL).$$

- Nach Bestimmung von k_n erhält man $\lambda_n = k_n^2$.

Hinweis: Für spezielle Randparameter (z. B. $h_0 = h_L = 0$ Neumann-Randbedingungen) können weitere einfache Anpassungen auftreten; im Allgemeinen bleibt die Vorgehensweise dieselbe.

c) Orthogonalität und Normierung Es gilt erneut die Sturm-Liouville-Orthogonalität: Für $m \neq n$ und die zugehörigen Eigenfunktionen y_m, y_n erfüllen

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0.$$

Beweis: Aus

$$y_m'' + \lambda_m y_m = 0, \quad y_n'' + \lambda_n y_n = 0$$

und Multiplikation der Gleichungen miteinander, folgt

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^L y_m y_n\, dx = [y_m' y_n - y_m y_n']_0^L.$$

Angewendete Randbedingungen geben

$$y_m'(0)y_n(0) - y_m(0)y_n'(0) = h_0 y_m(0)y_n(0) - h_0 y_m(0)y_n(0) = 0,$$

und

$$y_m'(L)y_n(L) - y_m(L)y_n'(L) = (-h_L y_m(L))y_n(L) - y_m(L)(-h_L y_n(L)) = 0.$$

Damit ist

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^L y_m y_n\, dx = 0.$$

Für $m \neq n$ folgt $\int_0^L y_m y_n\, dx = 0$. Zur Normierung wählt man

$$\phi_n(x) = \frac{y_n(x)}{\|y_n\|}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_0^L y_n(x)^2\, dx,$$

so dass

$$\int_0^L \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx = \delta_{mn}.$$

Je nach Parameterwahl h_0, h_L besitzt man in der Praxis keine geschlossene Closed-Form für y_n; die Normierung erfolgt daher numerisch durch $\|y_n\| = \sqrt{\int_0^L y_n^2}$.