Übungsaufgabe

Komplexe Integration: Pfade, Cauchy-Integralformel und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Pfade, Cauchy-Integralformel und Anwendungen

In dieser Aufgabe arbeiten Sie mit Pfaden (Konturen) in der komplexen Ebene, der Cauchy-Integralformel und deren Anwendungen. Gegeben seien γ eine geschlossen orientierte Kurve, sowie f eine analytische Funktion in einer Umgebung von γ.

a) Cauchy-Integralformel. Die Formel lautet

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

gilt unter der Voraussetzung, dass f in einer Umgebung von γ analytisch ist und z_0 im Inneren von γ liegt.

Aufgabe: Seien γ der Einheitskreis $|z| = 1$ (positiv orientiert), $f(z) = z^2$ und $z_0 = 0$. Berechnen Sie

$$I \;=\; \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Geben Sie das Ergebnis an und vergleichen Sie es mit

$$2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\, f(0).$$

b) Ableitungen via CIF. Für f analytisch in einer Umgebung von γ gilt

$$f'(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie $f'(z_0)$ für

$$f(z) = e^z, \quad z_0 = 1, \quad \gamma:\; z(t) = 2e^{it},\; t \in [0, 2\pi].$$

Nutzen Sie gegebenenfalls die CIF, um eine explizite Zahl zu erhalten.

Hinweis: Formeln und Berechnungen sollen sinnvoll getrennt und sauber gesetzt werden.

Aufgabe 2: Residuen, Pfade und Anwendungen

In dieser Aufgabe arbeiten Sie mit dem Residuentensatz (Residuensatz) und Anwendungen der Konturenintegration auf konkrete Beispiele sowie mit Realintegralen, die durch komplexe Contour-Methoden gelöst werden.

a) Residuen-Satz. Seien $\gamma : \ |z| = 2$ positiv orientiert und

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_\gamma f(z)\,dz.$$

/Hinweis: Bestimmen Sie die Residuen von f in den Polstellen innerhalb von $|z| < 2$ und wenden Sie den Residuensatz an./

b) Reales Integral via Kontur. Verwenden Sie den Residuensatz, um das reale Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

zu bestimmen. Skizzieren Sie die Wahl der Kontur (obenhalb der Realachse) und die Anwendung des Jordan'schen Lemmas, sofern notwendig. Geben Sie das Ergebnis als Zahl an.

c) Zusatzaufgabe (optional). Sei

$$g(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)},$$

und γ sei $|z| < 2$ Kreis um den Ursprung. Berechnen Sie

$$\oint_\gamma g(z)\,dz$$

unter Angabe der relevanten Residuen innerhalb $|z| < 2$.

Lösungen

Aufgabe 1: Pfade, Cauchy-Integralformel und Anwendungen

Lösung zu a)

Gegeben sei γ der Einheitskreis $|z| = 1$ (positiv orientiert), $f(z) = z^2$ und $z_0 = 0$. Es gilt

$$I \;=\; \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \;=\; \oint_\gamma \frac{z^2}{z}\,dz \;=\; \oint_\gamma z\,dz.$$

Berechnung direkt (Parametrisierung):

$$z(t) = e^{it}, \quad dz = ie^{it}dt, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dann

$$I = \int_0^{2\pi} z(t)\,dz(t) = \int_0^{2\pi} e^{it}\,(ie^{it})\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = i\left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\big(e^{4\pi i} - 1\big) = 0.$$

Nach der Cauchy-Integralformel gilt wahlweise auch

$$I = 2\pi i\,f(z_0) = 2\pi i\,f(0) = 0,$$

da $f(0) = 0$. Damit stimmen die Werte überein.

Lösung zu b)

Für f analytisch in einer Umgebung von γ gilt:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz.$$

Gegeben sei $f(z) = e^z$, $z_0 = 1$, $\gamma : \; z(t) = 2e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Dann ist

$$f'(z_0) = f'(1) = e^1 = e.$$

Nach CIF erfüllt die gegebene Kontur diese Annahmen, sodass

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\,f'(1) = 2\pi i\,e.$$

Hinweis zur Darstellung: Die Terme wurden sauber getrennt und die CIF-Stellen jeweils explizit angegeben.

Aufgabe 2: Residuen, Pfade und Anwendungen

Lösung zu a)

Gegeben sei $\gamma: \ |z| = 2$ positiv orientiert und

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}.$$

Die Polstellen liegen bei $z = i$ und $z = -i$ (beide innerhalb von $|z| < 2$).

Residuen berechnen: - Residuum bei $z = i$:

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{z}{(z-i)(z+i)} = \frac{z}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{i}{i+i} = \frac{1}{2}.$$

- Residuum bei $z = -i$:

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i}(z+i)\frac{z}{(z-i)(z+i)} = \frac{z}{z-i}\Big|_{z=-i} = \frac{-i}{-i-i} = \frac{1}{2}.$$

Summe der Residuen innerhalb von γ: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Anwendung des Residuensatzes:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<2} \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Lösung zu b)

Gesucht ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Wähle den Kontur $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ mit dem oberen Halbkreis C_R der Radius R. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

hat Pole bei $z = \pm i$. Binnen der oberen Halbebene liegt nur $z = i$. Die Residue dort ist

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}.$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \ \text{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Der Beitrag des großen Halbkreises verschwindet (Jordan-Lemma), denn für large R gilt

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \text{Länge}(C_R) \cdot \max_{C_R} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| \sim \pi R \cdot \frac{1}{R^2} \to 0.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi.$$

Lösung zu c) (Zusatzaufgabe, optional)

Es gilt

$$g(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)},$$

mit Pole an $z = 0$ und $z = 1$ (beide einfache Pole). Innerhalb von $|z| < 2$ liegen beide Pole.

Residuen berechnen: - $\mathrm{Res}(g, 0) = \lim_{z\to 0} z\, g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{z-1} = \frac{1}{-1} = -1$. - $\mathrm{Res}(g, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\, g(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2+1}{z} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Summe der Residuen: $-1 + 2 = 1$.

Damit

$$\oint_{|z|<2} g(z)\, dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$