# Übungsaufgabe

## Stoff- und Energieintegration in Verfahren: Design- und Entwicklungsaspekte von Produkten/Prozessen basierend auf Gleichgewichtsanalysen

| | |
|---|---|
| **Universität:** | Technische Universität Berlin |
| **Kurs/Modul:** | Thermodynamik II |
| **Erstellungsdatum:** | September 6, 2025 |


Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Thermodynamik II

# Aufgabe 1: Grundlagen der komplexen Zahlen

Betrachten Sie komplexe Zahlen der Form $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aufgaben befassen sich mit Polarform, Potenzen, Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$ sowie mit grundlegenden Identitäten.

a) Schreibe $z = -3 + 4i$ in Polarform $z = r\,e^{i\theta}$. Gib $r$ und $\theta$ im Intervall $(-\pi, \pi]$ an und fasse $z$ auch als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bzw. $z = r\,e^{i\theta}$ zusammen.

b) Berechne $z^2$ und $z^3$ in der Form $a + bi$ und verifiziere die Ergebnisse durch die Polarform $z^n = r^n e^{in\theta}$.

c) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$. Gib sie sowohl in der Form $z_k = e^{i\pi k/2}$ als auch in der kartesischen Form an.

d) Zeige die Identitäten

$$z\,\overline{z} = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = 2\,\Re(z),$$

und berechne beide Größen für $z = -3 + 4i$.

# Aufgabe 2: Komplexe Zahlen als Vektor- und Abbildungen

Betrachte komplexe Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und als Matrixoperatoren. Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass die Multiplikation mit $z$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wirkt durch

$$(x, y) \;\mapsto\; (ax - by,\; bx + ay).$$

Gib die entsprechende Matrixdarstellung an und formuliere sie als

$$M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die Matrix $M_{1+i}$ für $z = 1 + i$ und interpretiere sie geometrisch.

c) Zeige, dass für $|z| = 1$ die Matrix $M_z$ orthogonal ist ($M_z^\top M_z = I$) und somit eine reine Rotation durch den Winkel $\theta = \arg z$ repräsentiert. Außerdem gilt $\cos\theta = a$ und $\sin\theta = b$ für $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

# Lösungen

# Aufgabe 1: Grundlagen der komplexen Zahlen

Betrachten Sie komplexe Zahlen der Form $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aufgaben befassen sich mit Polarform, Potenzen, Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$ sowie mit grundlegenden Identitäten.

a) Schreibe $z = -3 + 4i$ in Polarform $z = r\,e^{i\theta}$. Gib $r$ und $\theta$ im Intervall $(-\pi, \pi]$ an und fasse $z$ auch als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bzw. $z = r\,e^{i\theta}$ zusammen.

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5, \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{3}{5}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{4}{5}.$$

Da $a < 0$ und $b > 0$ liegt $\theta$ im Quadranten II, entsprechend

$$\theta = \operatorname{atan2}(4, -3) = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 2.2142974356\,\text{rad}.$$

Somit ist

$$z = 5\,e^{i\theta} = 5\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) \quad \text{bzw.} \quad z = 5\big(\cos\theta + i\sin\theta\big). \tag{L1}$$

b) Berechne $z^2$ und $z^3$ in der Form $a + bi$ und verifiziere die Ergebnisse durch die Polarform $z^n = r^n e^{in\theta}$.

Berechnung direkt in der kartesischen Form:

$$z^2 = (-3 + 4i)^2 = (-3)^2 - 4^2 + 2(-3)(4)i = 9 - 16 - 24i = -7 - 24i.$$

$$z^3 = z^2 z = (-7 - 24i)(-3 + 4i) = (21 + 96) + (-28 + 72)i = 117 + 44i.$$

Verifikation über die Polarform: Mit $r = 5$ und $\theta$ aus Teil a) gilt

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} = 25\big(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\big).$$

Aus $\cos\theta = -3/5$, $\sin\theta = 4/5$ folgt

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}, \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Also

$$z^2 = 25\left(-\frac{7}{25} - i\frac{24}{25}\right) = -7 - 24i,$$

und

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 125\big(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\big).$$

Mit $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4(-3/5)^3 - 3(-3/5) = 117/125$ und $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 44/125$ erhält man

$$z^3 = 125\left(\frac{117}{125} + i\,\frac{44}{125}\right) = 117 + 44i,$$

welche mit der direkten Berechnung übereinstimmen.

c) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$. Gib sie sowohl in der Form $z_k = e^{i\pi k/2}$ als auch in der kartesischen Form an.

Die Vielfachen der Grundwinkelmenge

$$z_k = e^{i\frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Daraus ergeben sich

$$z_0 = e^{i0} = 1, \qquad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad z_2 = e^{i\pi} = -1, \qquad z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

In kartesischer Form:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i.$$

d) Zeige die Identitäten

$$z\,\overline{z} = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = 2\,\Re(z),$$

und berechne beide Größen für $z = -3 + 4i$.

Allgemein gilt

$$z\,\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,\Re(z).$$

Für $z = -3 + 4i$ $(a = -3,\ b = 4)$ folgt

$$z\,\overline{z} = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = (-3 + 4i) + (-3 - 4i) = -6 = 2\,(-3) = 2\,\Re(z).$$

## Aufgabe 2: Komplexe Zahlen als Vektor- und Abbildungen

Betrachte komplexe Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und als Matrixoperatoren. Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass die Multiplikation mit $z$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wirkt durch

$$(x, y) \ \mapsto \ (ax - by,\ bx + ay).$$

Gib die entsprechende Matrixdarstellung an und formuliere sie als

$$M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Beweis: Mit $z = (a + bi)$ und dem Vektor $(x, y)$ entspricht $x + iy$ der Real- und Imaginärteil. Die Multiplikation

$$z(x + iy) = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

liefert die Koordinaten $(ax - by,\ bx + ay)$. Demzufolge ist

$$M_z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die Matrix $M_{1+i}$ für $z = 1 + i$ und interpretiere sie geometrisch.

Für $a = 1$, $b = 1$ erhält man

$$M_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch entspricht diese Matrix einer Skalierung mit Faktor $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ gefolgt von einer Rotation um $\theta$ mit

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Damit ist $M_{1+i} = r\,R(\theta)$ mit $r = \sqrt{2}$ und $R(\theta)$ der Rotationsmatrix

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Zeige, dass für $|z| = 1$ die Matrix $M_z$ orthogonal ist ($M_z^\mathsf{T} M_z = I$) und somit eine reine Rotation durch den Winkel $\theta = \arg z$ repräsentiert. Außerdem gilt $\cos\theta = a$ und $\sin\theta = b$ für $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Es gilt

$$M_z^\mathsf{T} M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Ist $|z| = 1$ d.h. $a^2 + b^2 = 1$, folgt

$$M_z^\mathsf{T} M_z = I_2,$$

also ist $M_z$ orthogonal. Da orthogonale Matrizen Rotationen oder Rotationen mit Spiegelungen darstellen und $\det M_z = a^2 + b^2 = 1$ positiv ist, handelt es sich um eine reine Rotation um den Winkel

$$\theta = \arg z, \quad \cos\theta = a, \quad \sin\theta = b \quad (a^2 + b^2 = 1).$$