

Übungsaufgabe

Zahlensysteme, Repräsentationen digitaler Werte
und grundlegende Arithmetik

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Technische Grundlagen der Informatik (TechGI) - Digitale Systeme
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Technische Grundlagen der Informatik (TechGI) - Digitale Systeme

Aufgabe 1: Zahlensysteme, Repräsentationen digitaler Werte und grundlegende Arithmetik

In dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich mit Basiswechseln, Repräsentationen von Zahlen in Formaten fester Breite sowie einfachen arithmetischen Operationen.

a) Repräsentiere die Dezimalzahl 439 in Binärdarstellung (Basis 2) und in Hexadezimaldarstellung (Basis 16). Gib beide Darstellungen an.

b) Schreibe die 8-Bit-Zahl -42 in Zweierkomplement-Darstellung. Gib die Binärdarstellung sowie die Hex-Darstellung an.

c) Addiere folgende zwei 8-Bit-Zahlen im Zweierkomplement und gib das Ergebnis als 8-Bit-Zahl an. Bestimme, ob ein Überlauf vorliegt:

$$Z1 = 60 \quad (\text{bin: } 0011\ 1100_2), \quad Z2 = -25 \quad (\text{bin: } 1110\ 0111_2).$$

d) Bestimme, ob bei der Addition von 120 und 70 im 8-Bit-Zweierkomplement ein Überlauf auftritt. Gib das 8-Bit-Ergebnis an.

e) Geben Sie die BCD-Darstellung der Dezimalzahl 259 an (verwenden Sie 4-Bit-Nibbles pro Ziffer). Schreibe die Bitfolge in Gruppen der Nibbles.

Aufgabe 2: Festkomma- und Gleitkomma-Repräsentationen; grundlegende Arithmetik

In dieser Aufgabe arbeiten Sie mit alternativen Darstellungen digitaler Werte jenseits reiner Ganzzahlen.

- a) Repräsentiere die Dezimalzahl 5.75 in einer 8-Bit-Festkomma-Darstellung im Format Q3.4. Gib die 8 Bits an. Dekodiere anschließend den Wert wieder.

- b) Repräsentiere die Dezimalzahl -2.75 in einer 8-Bit-Festkommadarstellung im Format Q3.4. Gib die 8 Bits an. Dekodiere anschließend den Wert wieder.

- c) Schreibe die Zahl 6.5 in IEEE-754 Single-Precision (32-Bit) Format. Gib die drei Felder an: Sign-Bit, Exponent und Mantisse, und notiere deren Kodierung.

- d) Vergleichen Sie festkomma- und gleitkomma-Repräsentationen hinsichtlich Reichweite, Auflösung und Rundung (ohne Lösung zu benoten).

Aufgabe 3: Grundlegende Arithmetik in digitalen Schaltungen; BCD- und Signierungs-Operationen

In dieser Aufgabe modellieren Sie einfache arithmetische Operationen mit festbreiten Formaten.

- a) Führe eine BCD-Addition der Zahlen 25 und 87 durch. Gib das Ergebnis in BCD an (Bits in 4er-Gruppen, sodass jede Gruppe eine Ziffer 0–9 codiert). Falls eine Korrektur nötig ist, beschreibe sie.
- b) Addiere 90 und -45; Gib das 8-Bit-Ergebnis im Zweierkomplement an. Bestimme, ob ein Overflow vorliegt.
- c) Gib die 8-Bit-Zweierkomplement-Darstellung der Dezimalzahl -128 an. Was ist Besonderes an diesem Wert?

Lösungen

Aufgabe 1: Zahlensysteme, Repräsentationen digitaler Werte und grundlegende Arithmetik

a) Lösung. Repräsentiere die Dezimalzahl 439 in Binärdarstellung (Basis 2) und in Hexadezimaldarstellung (Basis 16). - Binär (Basis 2): 110110111_2 . - Hexadezimal (Basis 16): $1B7_{16}$.

b) Lösung. Schreibe die 8-Bit-Zahl -42 in Zweierkomplement-Darstellung. Gib die Binärdarstellung sowie die Hex-Darstellung an. - Binär (8 Bit, Zweierkomplement): 11010110_2 . - Hex-Darstellung: $D6_{16}$.

c) Lösung. Addiere folgende zwei 8-Bit-Zahlen im Zweierkomplement und gib das Ergebnis als 8-Bit-Zahl an. Bestimme, ob ein Überlauf vorliegt:

$$Z1 = 60 \quad (\text{bin: } 0011\ 1100_2), \quad Z2 = -25 \quad (\text{bin: } 1110\ 0111_2).$$

- Summe: $60 + (-25) = 35$. - Binär-Ergebnis (8 Bit): $0010\ 0011_2$ (entspricht $0x23$). - Überlauf: Nein (Die Vorzeichen der Summanden unterscheiden sich; Überlauf tritt nur auf, wenn Vorzeichen der Summanden gleich sind und das Vorzeichen des Ergebnisses anders ist).

d) Lösung. Bestimme, ob bei der Addition von 120 und 70 im 8-Bit-Zweierkomplement ein Überlauf auftritt. Gib das 8-Bit-Ergebnis an. - 120 in Binär: $0111\ 1000_2$; 70 in Binär: $0100\ 0110_2$. - Addition (8 Bit): $0111\ 1000 + 0100\ 0110 = 1011\ 1110_2$ (das ist $0xBE$). - Überlauf: Ja, da beide Operanden positiv sind, das Ergebnis jedoch als negativ interpretiert wird (Vorzeichenwechsel). - Ergebnis (8 Bit): $1011\ 1110_2$ (Dezimalwert als Vorzeicheninterpretation: -66 im Zweierkomplement).

e) Lösung. Geben Sie die BCD-Darstellung der Dezimalzahl 259 an (verwenden Sie 4-Bit-Nibbles pro Ziffer). Schreibe die Bitfolge in Gruppen der Nibbles. - Ziffern: 2, 5, 9. - BCD-Darstellung: 0010 0101 1001.

Aufgabe 2: Festkomma- und Gleitkomma-Repräsentationen; grundlegende Arithmetik

a) Lösung. Repräsentiere die Dezimalzahl 5.75 in einer 8-Bit-Festkomma-Darstellung im Format Q3.4. Gib die 8 Bits an. Dekodiere anschließend den Wert wieder. - Bits im Format Q3.4: 0101 1100. - Dekodierung: Vor dem Komma 4 Bits (0101) = 5; Nach dem Komma 4 Bits (1100) = $12/16 = 0.75$; Gesamtwert = 5.75.

b) Lösung. Repräsentiere die Dezimalzahl -2.75 in einer 8-Bit-Festkommadarstellung im Format Q3.4. Gib die 8 Bits an. Dekodiere anschließend den Wert wieder. - Bits im Format Q3.4: 1101 0100. - Dekodierung: Zwei's-Komplement-Bestimmung ergibt -2.75 (0xD4 entspricht -2.75 im Q3.4).

c) Lösung. Schreibe die Zahl 6.5 in IEEE-754 Single-Precision (32-Bit) Format. Gib die drei Felder an: Sign-Bit, Exponent und Mantisse, und notiere deren Kodierung. - Sign-Bit: 0. - Exponent: 10000001 (Dezimal 129, was den Bias von 127 ergibt: $129 - 127 = 2$). - Mantisse (Fraction): 101000000000000000000000 (Nach der führenden 1 folgt 1010 0000 ...). - Zusammengenommen (32 Bit): 0 10000001 101000000000000000000000. - Alternative Darstellung: Hexwert 0x40D00000.

d) Lösung. Vergleichen Sie Festkomma- und Gleitkomma-Repräsentationen hinsichtlich Reichweite, Auflösung und Rundung (ohne Lösung zu benoten). - Reichweite: - Festkomma: feste Wertebereich, limitiert durch die Wortbreite; bei Q3.4 -8 bis +7.9375. - Gleitkomma (IEEE-754): großer dynamischer Bereich dank Exponent, z. B. ca. $1.18e-38$ bis $3.4e38$ bei 32 Bit. - Auflösung: - Festkomma: feste Schrittweite (hier $1/16 = 0.0625$). - Gleitkomma: Abstufungen variieren je nach Exponent; hohe Präzision nahe Null, große Sprünge bei großen Beträgen. - Rundung: - Festkomma: deterministisch, fest definierte Abtastschritte. - Gleitkomma: Rundung erfolgt typischerweise nach IEEE-754-Rundungsregeln (z. B. round-to-nearest). - Weitere Differenzen: - Komplexität der Hardware, Portabilität zwischen Plattformen, Datentransformationen (Konvertierung zwischen Formaten) und Fehlerverhalten bei Extremwerten. - Hinweis: Die hier genannten Punkte dienen der konzeptionellen Gegenüberstellung und sind nicht zu benoten.

Aufgabe 3: Grundlegende Arithmetik in digitalen Schaltungen; BCD- und Signierungs-Operationen

a) Lösung. Führe eine BCD-Addition der Zahlen 25 und 87 durch. Gib das Ergebnis in BCD an (Bits in 4er-Gruppen, sodass jede Gruppe eine Ziffer 0–9 codiert). Falls eine Korrektur nötig ist, beschreibe sie. - Schreibweise der Operanden in BCD: - 25: 0010 0101 - 87: 1000 0111 - Addiere Ziffern nibbleweise mit BCD-Korrektur: - Unteres Nibble ($5 + 7 = 12$): 1100 (12) → Korrektur nötig (+6) ergibt 0010 mit Carry 1. - Oberes Nibble ($2 + 8 + \text{Carry } 1 = 11$): 1011 (11) → Korrektur nötig (+6) ergibt 0001 mit Carry 1. - Finales BCD-Ergebnis: Carry-out 1, Ziffern von hoch nach runter: 1 1 2. - BCD-Darstellung als 3 Nibbles: 0001 0001 0010.

b) Lösung. Addiere 90 und -45; Gib das 8-Bit-Ergebnis im Zweierkomplement an. Bestimme, ob ein Overflow vorliegt. - 90: $0101\ 1010_2$. - -45: Zwei's-Komplement: $0010\ 1101 \rightarrow 1101\ 0011$ (0xD3). - Summe (8 Bit): $0101\ 1010 + 1101\ 0011 = 0010\ 1101_2$ (0x2D) = 45. - Overflow: Nein (Sign der Operanden verschieden; kein Vorzeichenwechsel im Ergebnis). - Ergebnis: $0010\ 1101_2$ (64er-Blocks: 45).

c) Lösung. Gib die 8-Bit-Zweierkomplement-Darstellung der Dezimalzahl -128 an. Was ist Besonderes an diesem Wert? - Zweierkomplement-Darstellung: $1000\ 0000_2$. - Besonderes: Es ist der minimale darstellbare Wert im 8-Bit-Zweierkomplement (-128); Negation von -128 ergibt +128, das jedoch außerhalb des 8-Bit-Bereichs liegt.