Übungsaufgabe

Singularitäten in der komplexen Ebene: isolierte Singularitäten, Removable, Polstellen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Isolierte Singularitäten in der komplexen Ebene

Betrachten Sie eine Funktion f, die in einer punctierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph ist, d. h. f ist holomorph in $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ für ein $r > 0$.

a) Definieren Sie den Begriff einer isolierten Singularität von f am Punkt z_0.

b) Formulieren Sie das Removability-Kriterium: Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann entfernbare, wenn es eine Funktion F gibt, die holomorph in einer Umgebung von z_0 ist und $F = f$ in $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ gilt. Geben Sie ggf. äquivalente Formulierungen an.

c) Eine isolierte Singularität z_0 ist genau dann eine Polstelle von Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r$$

existiert mit $a_{-m} \neq 0$. Alternativ gilt: Es existiert m so, dass $(z - z_0)^m f(z)$ holomorph in $D(z_0, r)$ ist und $(z - z_0)^m f(z)$ anz_0 nicht verschwindet. Geben Sie diese äquivalenten Formulierungen als Aufgabe.

d) Geben Sie drei Beispiele (ohne Lösung) zum Klassifizieren einer isolierten Singularität:

i) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$ mit $z_0 = 2$. Bestimmen Sie Ordnung der Polstelle und geben Sie die ersten Terme der Laurent-Reihe um z_0.

ii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}$ mit $z_0 = 1$. Bestimmen Sie Ordnung der Polstelle und geben Sie die ersten Terme der Laurent-Reihe um z_0.

iii) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + 2$ mit $z_0 = 1$. Bestimmen Sie Ordnung der Polstelle und geben Sie die ersten Terme der Laurent-Reihe um z_0.

Aufgabe 2: Laurent-Reihen und Polordnungen

Sei f eine Funktion, die in einer punctierten Umgebung von z_0 holomorph ist. Betrachten Sie die Laurent-Entwicklung um z_0.

a) Formulieren Sie die allgemeine Form einer Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

und erläutern Sie die Bedeutung der negativen Koeffizienten (Hauptteil) im Zusammenhang mit Polstellen.

b) Bestimmen Sie die Ordnung und die ersten drei Terme der Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^3} \quad \text{um } z_0 = 2.$$

Geben Sie explizit die Koeffizienten der negativen Potenzen an.

c) Betrachten Sie

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

und bestimmen Sie die Ordnung der Polstelle bei $z_0 = 1$. Geben Sie die ersten zwei Terme der Laurent-Reihe um z_0 an.

d) Untersuchen Sie

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + 2$$

bei $z_0 = 1$. Geben Sie die ersten drei Terme der Laurent-Reihe um z_0 an und benennen Sie die Polordnung sowie die Koeffizienten der negativen Potenzen.

Aufgabe 3: Removability-Kriterium und Beispiele

Untersuchen Sie, ob die gegebenen Funktionen an den jeweiligen Punkten entfernbare Singularitäten, Polstellen oder eventuell andere Typen besitzen. Nutzen Sie die gängigen Kriterien zur Klassifikation.

a) Sei f holomorph auf $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ und dort beschränkt, d. h. $|f(z)| \leq M$ für alle $0 < |z - z_0| < r$. Zeigen Sie, dass z_0 eine entfernbare Singularität ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Polstelle und das Residuum der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2} \quad \text{bei } z_0 = 3.$$

c) Betrachten Sie

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-4)},$$

und klassifizieren Sie die Singularität bei $z_0 = 4$ (Ordnung der Polstelle; Residuum optional).

Lösungen

Aufgabe 1: Isolierte Singularitäten in der komplexen Ebene

a) *Lösung:* Eine isolierte Singularität von f am Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt vor, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass f holomorph ist in der punctierten Umgebung $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

b) *Lösung:* Removability-Kriterium. Falls f holomorph in $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ist und dort beschränkt ist (z. B. $|f(z)| \leq M$ für $0 < |z - z_0| < r$), existiert eine holomorphe Funktion F in einer Umgebung von z_0 mit $F = f$ auf $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Dann ist z_0 eine entfernbare Singularität und $F(z_0)$ kann als $\lim_{z \to z_0} f(z)$ gesetzt werden.
Äquivalente Formulierungen: (i) Die Laurent-Reihe von f um z_0 besitzt keine negativten Potenzen (kein Hauptteil). (ii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert und ist endlich.

c) *Lösung:* Eine isolierte Singularität z_0 ist eine Polstelle von Ordnung $m \in \mathbb{N}$, falls es eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

gibt mit $a_{-m} \neq 0$. Äquivalent gilt: Es existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass $(z - z_0)^m f(z)$ holomorph in $D(z_0, r)$ ist und $(z - z_0)^m f(z)$ an z_0 nicht verschwindet. Die Ordnung der Polstelle ist dann m. Im Fall eines Pols kann man alternativ schreiben: $(z - z_0)^m f(z)$ holomorph und $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ verschwindet nicht, etc.

d) *Beispiele (Lösung):*

1. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$ mit $z_0 = 2$. Die Polordnung ist $m = 1$. Um $z_0 = 2$ gilt

   $$f(z) = \frac{(z-2)+3}{z-2} = \frac{3}{z-2} + 1,$$

   d. h. die ersten Terme der Laurent-Reihe um z_0 sind $3/(z-2)$ und 1.

2. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}$ mit $z_0 = 1$. Die Polordnung ist $m = 1$ (einfache Polstelle). Die Laurent-Reihe um $z_0 = 1$ beginnt mit

   $$\sin z = \sin 1 + \cos 1 \, (z-1) - \frac{\sin 1}{2}(z-1)^2 + \cdots ,$$

   daher

   $$f(z) = \frac{\sin z}{z-1} = \frac{\sin 1}{z-1} + \cos 1 - \frac{\sin 1}{2}(z-1) + \cdots .$$

   Die ersten Terme: $\dfrac{\sin 1}{z-1} + \cos 1$.

3. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + 2$ mit $z_0 = 1$. Es gilt

   $$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1+(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1},$$

   also

   $$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + 2.$$

   Die Polordnung ist $m = 2$ und die ersten drei Terme der Laurent-Reihe um $z_0 = 1$ sind $\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + 2$.

Aufgabe 2: Laurent-Reihen und Polordnungen

a) *Lösung:* Sei f in einer punctierten Umgebung von z_0 holomorph. Die allgemein zulässige Laurent-Entwicklung um z_0 hat die Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r.$$

Die negativen Koeffizienten a_{-k} (mit $k \geq 1$) bilden den Hauptteil der Reihe. Die Existenz eines nichttrivialen Hauptteils charakterisiert eine Polstelle; fehlt der Hauptteil, liegt eine entfernbare Singularität vor (d. h. alle $a_{-k} = 0$ für $k \geq 1$).

b) *Lösung:* Für

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^3} \quad \text{um } z_0 = 2$$

setzen wir $w = z - 2$. Dann

$$f(z) = \frac{w+3}{w^3} = \frac{1}{w^2} + \frac{3}{w^3} = \frac{3}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Die Ordnung der Polstelle ist $m = 3$. Die ersten drei Terme der Laurent-Reihe (um $z_0 = 2$) sind

$$\frac{3}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} + 0 \cdot \frac{1}{(z-2)}.$$

Die Koeffizienten der negativen Potenzen lauten $a_{-3} = 3$, $a_{-2} = 1$, $a_{-1} = 0$.

c) *Lösung:* Für

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

ist die Ordnung der Polstelle bei $z_0 = 1$ gleich $m = 1$. Die ersten zwei Terme der Laurent-Reihe um $z_0 = 1$ erhalten wir aus der Ableitung von $\sin z$ an der Stelle $z = 1$:

$$\sin z = \sin 1 + \cos 1\,(z-1) + \cdots \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{\sin 1}{z-1} + \cos 1 + \cdots.$$

Erste zwei Terme: $\dfrac{\sin 1}{z-1} + \cos 1$.

d) *Lösung:* Für

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + 2$$

haben wir

$$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)},$$

also

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)} + 2.$$

Die ersten drei Terme der Laurent-Reihe um $z_0 = 1$ sind $\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z-1)} + 2$. Die Polordnung ist $m = 2$, die Koeffizienten der negativen Potenzen sind $a_{-2} = 1$ und $a_{-1} = 1$.

Aufgabe 3: Removability-Kriterium und Beispiele

a) *Lösung:* Sei f holomorph auf $D(z_0, r)\setminus\{z_0\}$ und dort beschränkt, d. h. $|f(z)| \leq M$. Dann ist z_0 eine entfernbare Singularität. Bezeichne $F(z) = f(z)$ für $z \neq z_0$ und define $F(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ (existiert wegen Stetigkeit/Beschränktheit). Dann ist F holomorph in ganz $D(z_0, r)$.

b) *Lösung:* $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$ hat eine Polstelle zweiter Ordnung bei $z_0 = 3$. Die Laurent-Reihe um $z_0 = 3$ beginnt mit

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2},$$

also ist der Hauptteil $\frac{1}{(z-3)^2}$ und der Koeffizient von $(z-3)^{-1}$ ist 0. Ordnung $m = 2$; Residuum $\operatorname{Res}_{z=3} f = 0$.

c) *Lösung:* Für

$$f(z) = \frac{e^z}{z-4}$$

ist $z = 4$ eine einfache Polstelle, weil e^z holomorph und $e^4 \neq 0$ ist. Die Laurent-Reihe um $z_0 = 4$ beginnt mit

$$f(z) = \frac{e^4}{z-4} + e^4 + \frac{e^4}{2}(z-4) + \cdots .$$

Daraus folgt Ordnung $m = 1$ und Residuum $\operatorname{Res}_{z=4} f = e^4$.