Übungsaufgabe

Boolesche Algebra, Normalformen und Minimierungstechniken (Karnaugh-Maps, Quine-McCluskey)

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Technische Grundlagen der Informatik (TechGI) - Digitale Systeme
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Technische Grundlagen der Informatik (TechGI) - Digitale Systeme

Aufgabe 1: Boolesche Algebra, Normalformen und Minimierungstechniken (Karnaugh-Maps, Quine-McCluskey)

Betrachten Sie Boolesche Funktionen mit drei Variablen A, B, C. Die Aufgaben befassen sich mit Vereinfachung, Normalformen, Karnaugh-Maps und dem Quine-McCluskey-Verfahren.

a) Vereinfache folgenden Ausdruck mit Booleschen Gesetzen:

$$F(A,B,C) = (A+B)\,(A'+C) + AB.$$

b) Wandeln Sie denselben Ausdruck in eine SOP-Form um und identifizieren Sie die Min-terms, die F wahr machen. Geben Sie F_SOP(A,B,C) als Summe von Produkten an.

c) Karnaugh-Map: Erstellen Sie eine Karnaugh-Karte für F mit drei Variablen. Verwenden Sie A als Zeile und BC als Spalten in Gray-Code (00, 01, 11, 10). Tragen Sie die Werte ein und notieren Sie sinnvolle Gruppen zur Minimierung.

	$BC = 00$	01	11	10
$A = 0$				
$A = 1$				

d) Quine-McCluskey: Gegeben die Min-terms M = {0,1,2,5,6,7} der Funktion F(A,B,C). Wenden Sie Quine-McCluskey an, um eine minimierte SOP zu bestimmen. Notieren Sie die Prime-Implicants und die wesentlichen Prime-Implicants.

Aufgabe 2: Erweiterte Minimierung mit 4 Variablen

a) Gegeben G(A,B,C,D) mit den Min-terms M = {0,2,3,5,6,7,8,9,12,13,14}. Minimieren Sie G zu einer SOP-Ausdruck mittels Karnaugh-Map oder Quine-McCluskey. Geben Sie das Endergebnis als F_SOP_G an.

b) Karnaugh-Map 4 Variablen: Erstellen Sie eine 4x4-Karte mit den Achsen AB und CD in Gray-Code (AB: 00,01,11,10; CD: 00,01,11,10). Beschriften Sie die Min-terms, führen Sie sinnvolle Gruppen durch und notieren Sie die minimierte SOP.

	$CD = 00$	01	11	10
$AB = 00$				
$AB = 01$				
$AB = 11$				
$AB = 10$				

c) Diskutieren Sie kurz, wie SOP- und POS-Formen in der Minimierung genutzt werden können und welche Vor- bzw. Nachteile sich daraus ergeben.

Lösungen

Aufgabe 1: Boolesche Algebra, Normalformen und Minimierungstechniken (Karnaugh-Maps, Quine-McCluskey)

a) Lösung:

$$F(A,B,C) = (A+B)\,(A'+C) + AB$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$\begin{aligned} F &= (A+B)(A'+C) + AB \\ &= (AA' + AC + BA' + BC) + AB \\ &= \big(0 + AC + A'B + BC\big) + AB \\ &= AC + A'B + BC + AB. \end{aligned}$$

Nun AB + A'B = B(A + A') = B. Also bleibt

$$F = AC + B + BC = B + AC.$$

Damit lautet die abrupte, minimalste Form:

$$F(A,B,C) = B + AC.$$

b) Lösung:

Vorausgesetzt, F = B + AC. Die Min-Terms, bei denen F wahr ist, ergeben sich aus B=1 bzw. A=1 und C=1.

- B=1 liefert die Min-Terms: m2, m3, m6, m7 (A,B,C = 0/1,1,0/1). - AC liefert die übrigen Min-Terms, bei denen B=0, aber A=1 und C=1: m5.

Kombiniert ergibt sich die Min-Term-Menge F = m(2,3,5,6,7).

Explizit als Summe von Produkten (SOP):

$$F_{\text{SOP}}(A,B,C) = A'BC' \ + \ A'BC \ + \ AB'C \ + \ ABC' \ + \ ABC.$$

Zusammenfassend: F$_SOPistm(2,3,5,6,7) bzw. explizit als Summe von 5 Produkten gegeben.$

c) Lösung (Karnaugh-Map 3 Variablen):

Karte (A als Zeile, BC in Gray-Code 00,01,11,10 als Spalten):

	$BC = 00$	01	11	10
$A = 0$	0	0	1	1
$A = 1$	0	1	1	1

sinnvolle Gruppen zur Minimierung: - Gruppe von vier Zellen (BC = 11 und 10, A = 0 oder 1): ergibt F = B. Tatsächlich deckt diese Gruppe m2, m3, m6, m7 ab (B=1). - Restliche 1 in der Zelle (A=0, BC=11/10?) ist bereits durch die obige Gruppe erfasst; alternative sinnvolle Ergänzung ist die Gruppe (A=0, C=1) bzw. A' C, die die verbleibenden 1–Zellen m2, m3 bzw. m6, m7 abdecken kann. Die Minimierung liefert dann die finale SOP-Funktion:

$$F(A,B,C) = B + AC.$$

Damit ergibt sich die minimale SOP-Funktion aus dem K-map-Verlauf.

d) Lösung (Quine–McCluskey-Verfahren):

Gegeben M = {0,1,2,5,6,7} der Funktion F(A,B,C).

Schritte (Kurzfassung): - Gruppen nach Anzahlen von Einsen: G0{0, G1{2, G2{5,6, G3{7. - Paarweisenes Zusammenführen zu implicants: - m0 und m2 → A' C' - m0 und m1 → A' B' - m2 und m6 → B C' - m5 und m7 → A C - m6 und m7 → A B - m3 (nicht vorhanden) etc. - Die resultierenden Prime-Implicants (PIs) sind u. a. AB, A'C', B'C, AC. - Essential Prime-Implicants: Jedes Minterm wird durch mehrere PIs abgedeckt; keine essenziellen PIs sind eindeutig feststellbar, daher ergibt sich eine minimale Abdeckung idealerweise durch drei PIs. - Eine minimale SOP (aus Quine–McCluskey) ergibt sich zu F$_min = AB + A'C' + B'C$.

Damit ist die minimierte SOP-Funktion anhand der QM-Analyse gegeben: F(A,B,C) = AB + A'C' + B'C.

Zusammenfassend für Aufgabe 1: - a) F = B + AC. - b) F$_SOP = m(2,3,5,6,7) = A'BC' + A'BC + AB'C + ABC' + ABC. - c) K - map - untersttzteMinimierungliefertF = B + AC. - d) QMergibtF_min = AB + A'C' + B'C.$

Aufgabe 2: Erweiterte Minimierung mit 4 Variablen

a) Lösung:

Gegeben G(A,B,C,D) mit Min-terms M = {0,2,3,5,6,7,8,9,12,13,14}. Minimieren Sie G zu einer SOP-Ausdruck mittels Karnaugh-Map oder Quine–McCluskey.

Schritte (Karnaugh-Map-Ansatz): - Die 1s befinden sich bei M = 0,2,3,5,6,7,8,9,12,13,14. - 4-Variablen-Karte (AB als Zeilen, CD als Spalten, Gray-Code: AB = 00,01,11,10; CD = 00,01,11,10):

	$CD = 00$	01	11	10
$AB = 00$	1	0	1	1
$AB = 01$	0	1	1	1
$AB = 11$	1	1	0	1
$AB = 10$	1	1	0	0

- Sinnvolle Gruppen: 1) Vierergruppe: A C' (A = 1, C = 0; B, D frei) deckt m8,m9,m12,m13. 2) Vierergruppe: A' C (A = 0, C = 1; B, D frei) deckt m2,m3,m6,m7. 3) Zwei Zellen: AB D' (m12,m14) – Deckung der M14 zusätzlich zu M12. 4) Zwei Zellen: A' B D (m5,m7) – Deckung von M5 zusätzlich zu M7. 5) Zwei Zellen: B' C' D' (m0,m8) – Deckung von M0 (zusätzlich zu M8). - Minimierte SOP (alle Gruppen-Terms addiert):

$$G_{\text{SOP}} = A\,C' \;+\; A'\,C \;+\; AB\,D' \;+\; A'B\,D \;+\; B'\,C'\,D'.$$

Damit ist das Endergebnis als SOP-G, basierend auf Karnaugh-Map, gegeben: F$_SOP_G(A,B,C,D) = AC' + A'C + ABD' + A'BD + B'C'D'$.

b) Lösung (Karnaugh-Map 4 Variablen):

Karte (AB gegen CD in Gray-Code):

	$CD = 00$	01	11	10
$AB = 00$	1	0	1	1
$AB = 01$	0	1	1	1
$AB = 11$	1	1	0	1
$AB = 10$	1	1	0	0

Gruppen zur Minimierung (erläutert):

- Gruppe 1: Vierergruppe A C' (Zellen m8, m9, m12, m13). - Gruppe 2: Vierergruppe A' C (Zellen m2, m3, m6, m7). - Gruppe 3: Paar AB D' (Zellen m12, m14). - Gruppe 4: Paar A' B D (Zellen m5, m7). - Gruppe 5: Paar B' C' D' (Zellen m0, m8).

Damit ergibt sich das gleiche minimale SOP-Ergebnis wie in Teil a): G$_SOP_G(A, B, C, D) = AC' + A'C + ABD' + A'BD + B'C'D'$.

(Die Zuordnung der Min-terms der Karte bestätigt die Zugehörigkeit.)

c) Lösung:

SOP-Formen (Sum-of-Products) ermöglichen einfache Implementierung als konkrete Produkt-Terme; sie sind gut, wenn die Schaltung viele AND-Gatter benötigt. POS-Formen (Product-of-Sums) ergeben sich aus dem Komplement von SOP-Formen (durch De Morgan) und sind oft hilfreich, wenn man eine geringe Anzahl von OR-Gattern benötigt oder eine posiformbasierte Minimierung bevorzugt.

- Vorzüge von SOP: - Einfache Umsetzung durch UND-Verknüpfungen von Literalen, gefolgt von einer ODER-Verknüpfung. - Oft geringe Gate-Anzahl bei standardlogischen Layouts. - Nachteile von SOP: - Kann zu vielen Produktterms führen, wenn die Funktion viele Unausgedehnte Min-terms besitzt. - Vorzüge von POS: - Direktes Mapping auf NAND/NOR-Architekturen. - Gut geeignet, wenn viele Nullstellen (0-Min-Terms) zusammengefasst werden sollen. - Nachteile von POS: - Kann zu längeren Summanden (in den Komponenten) führen, da jeder Sum-term mehrere Literale enthalten kann.

In dieser Musterlösung wurden sowohl SOP- (2a/2b) als auch die zugrundeliegende POS-/Karten-basierte Sichtweise genutzt, um die Minimierung zu veranschaulichen.