Übungsaufgabe

Belastungsanalyse und Bestimmung von Beanspruchungen in Bauteilen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Konstruktion 1
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Belastungsarten und Grundgrößen in Bauteilen

In dieser Aufgabe werden die häufigsten Belastungsarten sowie grundlegende Spannungsgrößen bei Bauteilen eingeführt. Die Aufgaben dienen der Übung der Belastungsanalyse für die konstruktive Dimensionierung.

a) Axiale Zuglast in einem zylindrischen Bauteil
Gegeben: Durchmesser $d = 60$ mm, axiale Zuglast $F = 5$ kN. Berechne die Normalkraftspannung σ im Bauteil.

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \sigma = \frac{F}{A}.$$

b) Biegebeanspruchung durch eine gleichmäßig verteilte Last
Gegeben: Balkenlänge $L = 0.80$ m, gleichmäßig verteilte Last $q = 1.2$ kN/m, Querschnitt rechteckig mit Breite $b = 40$ mm und Höhe $h = 60$ mm. Berechne:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad c = \frac{h}{2}, \quad M_{\max} = \frac{qL^2}{8}, \quad \sigma_{\mathrm{b}} = \frac{M_{\max} c}{I}.$$

c) Torsionsbeanspruchung einer Welle
Gegeben: Rundstab $d = 50$ mm, Torsionsmoment $T = 40$ N m. Berechne die maximalen Scherspannung τ.

$$J = \frac{\pi d^4}{32}, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \tau_{\max} = \frac{Tr}{J}.$$

d) Wahl des Bewertungskriteriums für Beanspruchungen
Nenne zwei gängige Beanspruchungskennwerte bzw. Kriterien, die zur Bewertung kombinierten Beanspruchungen herangezogen werden können, und erläutere kurz, welches Kriterium in der Praxis typischerweise zur Beurteilung der Tragfähigkeit herangezogen wird.

Aufgabe 2: Äquivalente Beanspruchung und Formulierung

In dieser Aufgabe geht es um die Kombination von Normal- und Schubspannungen und die Bestimmung einer äquivalenten Beanspruchung.

a) Torsionsspannung in einer Rundwelle
Gegeben: Rundstab $d = 40$ mm, Torsionsmoment $T = 120$ N m. Berechne die maximale Scherspannung τ.

$$J = \frac{\pi d^4}{32}, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \tau_{\max} = \frac{Tr}{J}.$$

b) Biegebeanspruchung durch transverse Last
Gegeben: Ein transverse Lastfall erzeugt am äußeren Rand einen Moment $M = 18$ N m in derselben Welle. Nutze denselben Querschnitt wie in a). Berechne die Biegebeanspruchung σ am äußersten Fiber.

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad c = \frac{d}{2}, \quad \sigma = \frac{Mc}{I}.$$

c) Kombination der Beanspruchungen
Gib die allgemeine Formel für die äquivalente Beanspruchung unter kombinierter Normal- und Schubspannung an, die typischerweise zur Beurteilung der Bauteilfestigkeit verwendet wird (z. B. virtuell nach einer geeigneten Gleichung). Setze dabei σ als Normalspannung aus a) bzw. b) und τ aus a).

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\,\tau^2}.$$

Aufgabe 3: Anwendung der äquivalenten Beanspruchung in einer einfachen Bauteilziehung

In dieser Aufgabe wird die bestimmbare äquivalente Beanspruchung für eine einfache Rundwelle bei kombiniertenLasten erschlossen.

a) Gegebene Lasten und Geometrie
Rundwelle aus Stahl: d = 40 mm. Torsionsmoment $T = 120$ N m. Biegebelastung durch äußeres Moment $M = 18$ N m bei derselben Welle. Wähle denselben Querschnitt wie oben.

b) Berechne die Spannungen
Berechne:

$$J \;=\; \frac{\pi d^4}{32}, \quad r \;=\; \frac{d}{2}, \quad \tau \;=\; \frac{T\,r}{J}, \quad I \;=\; \frac{\pi d^4}{64}, \quad c \;=\; \frac{d}{2}, \quad \sigma \;=\; \frac{M\,c}{I}.$$

c) Äquivalente Beanspruchung
Berechne die äquivalente Beanspruchung nach der Formel

$$\sigma_{\text{eq}} \;=\; \sqrt{\sigma^2 \;+\; 3\,\tau^2}.$$

Lösungen

Aufgabe 1: Belastungsarten und Grundgrößen in Bauteilen

Lösung zu a): Axiale Zuglast in einem zylindrischen Bauteil
Gegeben: $d = 60$ mm, $F = 5$ kN $= 5000$ N. Querschnittsfläche

$$A \;=\; \frac{\pi d^2}{4} \;=\; \frac{\pi (60)^2}{4}\ \mathrm{mm}^2 \;=\; 900\,\pi\ \mathrm{mm}^2 \;\approx\; 2827.43\ \mathrm{mm}^2.$$

Normalkraftspannung

$$\sigma \;=\; \frac{F}{A} \;=\; \frac{5000}{2827.43}\ \mathrm{N/mm}^2 \;\approx\; 1.77\ \mathrm{MPa}.$$

$$\boxed{\sigma \approx 1.77\ \mathrm{MPa}}$$

Lösung zu b): Biegebeanspruchung durch eine gleichmäßig verteilte Last
Gegeben: $L = 0.80$ m, $q = 1.2$ kN/m $= 1.2$ N/mm, Querschnitt rechteckig mit $b = 40$ mm, $h = 60$ mm.

Trägheitsmoment

$$I \;=\; \frac{bh^3}{12} \;=\; \frac{40 \cdot 60^3}{12} \;=\; \frac{40 \cdot 216{,}000}{12} \;=\; 720{,}000\ \mathrm{mm}^4.$$

Spannabstand

$$c \;=\; \frac{h}{2} \;=\; 30\ \mathrm{mm}.$$

Momentenverlauf

$$M_{\max} \;=\; \frac{qL^2}{8} \;=\; \frac{1.2 \cdot (800)^2}{8} \;=\; \frac{1.2 \cdot 640{,}000}{8} \;=\; 96{,}000\ \mathrm{N\,mm} \;=\; 96\ \mathrm{N\,m}.$$

Schub- bzw. Normalspannungen

$$\sigma_b \;=\; \frac{M_{\max} c}{I} \;=\; \frac{96{,}000 \cdot 30}{720{,}000} \;=\; \frac{2{,}880{,}000}{720{,}000} \;\approx\; 4.0\ \mathrm{MPa}.$$

$$\boxed{\sigma_b \approx 4.0\ \mathrm{MPa}}$$

Lösung zu c): Torsionsbeanspruchung einer Welle
Gegeben: Rundstab $d = 50$ mm, Torsionsmoment $T = 40$ N m $= 40{,}000$ N mm.

Joule-Polarisationsmoment

$$J \;=\; \frac{\pi d^4}{32} \;=\; \frac{\pi (50)^4}{32} \;=\; \frac{\pi\, 6{,}250{,}000}{32} \;\approx\; 613{,}279\ \mathrm{mm}^4.$$

Radius

$$r \;=\; \frac{d}{2} \;=\; 25\ \mathrm{mm}.$$

Maximale Scherrspannung

$$\tau_{\max} \;=\; \frac{T r}{J} \;=\; \frac{40{,}000 \cdot 25}{613{,}279} \;\approx\; 1.63\ \mathrm{N/mm}^2 \;=\; 1.63\ \mathrm{MPa}.$$

$$\boxed{\tau_{\max} \approx 1.63\ \mathrm{MPa}}$$

Lösung zu d): Wahl des Bewertungskriteriums für Beanspruchungen
Zwei gängige Beanspruchungskennwerte/Kriterien: - Von-Mises-Kriterium (Verschiebungsenergie-Kriterium) – gut geeignet für duktiles Materialverhalten; Berücksichtigung von Normal- und Schubspannung. - Tresca-Kriterium (Maximum-Scherfestigkeitskriterium) – einfache, konservative Abschätzung, basiert auf maximaler Schubspannung.

In der Praxis wird typischerweise das Von-Mises-Kriterium verwendet, insbesondere für duktile Werkstoffe, da es den Verformungszustand besser abbildet und oft weniger konservativ als Tresca ist.

Aufgabe 2: Äquivalente Beanspruchung und Formulierung

Lösung zu a): Torsionsspannung in einer Rundwelle
Gegeben: Rundstab $d = 40$ mm, Torsionsmoment $T = 120$ N m $= 120{,}000$ N mm.

J

$$J \;=\; \frac{\pi d^4}{32} \;=\; \frac{\pi(40)^4}{32} \;=\; \frac{\pi\cdot 2{,}560{,}000}{32} \;=\; 80{,}000\,\pi \;\approx\; 251{,}327 \text{ mm}^4.$$

Radius

$$r \;=\; \frac{d}{2} \;=\; 20 \text{ mm}.$$

Torsionsspannung

$$\tau_{\max} \;=\; \frac{Tr}{J} \;=\; \frac{120{,}000\cdot 20}{251{,}327} \;=\; \frac{2{,}400{,}000}{251{,}327} \;\approx\; 9.55 \text{ MPa}.$$

$$\boxed{\tau_{\max} \approx 9.55 \text{ MPa}}$$

Lösung zu b): Biegebeanspruchung durch transverse Last
Gegeben: Querschnitt wie oben, äußeres Moment $M = 18$ N m $= 18{,}000$ N mm.

Trägheitsmoment

$$I \;=\; \frac{\pi d^4}{64} \;=\; \frac{\pi(40)^4}{64} \;=\; \frac{\pi\cdot 2{,}560{,}000}{64} \;=\; 40{,}000\,\pi \;\approx\; 125{,}664 \text{ mm}^4.$$

Spannabstand

$$c \;=\; \frac{d}{2} \;=\; 20 \text{ mm}.$$

Normalspannung

$$\sigma \;=\; \frac{Mc}{I} \;=\; \frac{18{,}000\cdot 20}{125{,}664} \;=\; \frac{360{,}000}{125{,}664} \;\approx\; 2.86 \text{ MPa}.$$

$$\boxed{\sigma \approx 2.86 \text{ MPa}}$$

Lösung zu c): Kombination der Beanspruchungen
Allgemeine äquivalente Beanspruchung

$$\sigma_{\text{eq}} \;=\; \sqrt{\sigma^2 \;+\; 3\,\tau^2}.$$

Es gilt hier $\tau = 9.55$ MPa (aus a)) und σ wahlweise aus a) oder aus b).

- Variante 1 (aus a), also $\sigma = 0$ MPa):

$$\sigma_{\text{eq}} \;=\; \sqrt{0^2 + 3(9.55)^2} \;=\; \sqrt{3\cdot 91.2025} \;\approx\; \sqrt{273.6075} \;\approx\; 16.6 \text{ MPa}.$$

- Variante 2 (aus b), $\sigma \approx 2.86$ MPa:

$$\sigma_{\text{eq}} \;=\; \sqrt{(2.86)^2 + 3(9.55)^2} \;=\; \sqrt{8.18 + 273.6075} \;\approx\; \sqrt{281.7875} \;\approx\; 16.8 \text{ MPa}.$$

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}} \approx 16.6\text{–}16.8 \text{ MPa}}$$

Aufgabe 3: Anwendung der äquivalenten Beanspruchung in einer einfachen Bauteilziehung

Lösung zu a): Gegebene Lasten und Geometrie
Rundwelle, Stahl, $d = 40$ mm. Torsionsmoment $T = 120$ N m; äußeres Moment $M = 18$ N m (gleicher Querschnitt wie oben).

Lösung zu b): Berechne die Spannungen
Torsion

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (40)^4}{32} = 251{,}327 \text{ mm}^4, \quad r = 20 \text{ mm}, \quad \tau = \frac{Tr}{J} = \frac{120{,}000 \cdot 20}{251{,}327} \approx 9.55 \text{ MPa}.$$

Biegespannung

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (40)^4}{64} = 125{,}664 \text{ mm}^4, \quad c = 20 \text{ mm}, \quad M = 18 \text{ N m} = 18{,}000 \text{ N mm}.$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{18{,}000 \cdot 20}{125{,}664} \approx 2.86 \text{ MPa}.$$

Lösung zu c): Äquivalente Beanspruchung

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\,\tau^2} = \sqrt{(2.86)^2 + 3\,(9.55)^2} \approx \sqrt{8.18 + 273.61} \approx 16.8 \text{ MPa}.$$