Übungsaufgabe

Statische und dynamische Festigkeitsnachweise von Wellen und Maschinenelementen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Konstruktion 1
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Konstruktion 1

Aufgabe 1: Statische Festigkeitsnachweise von Wellen in Welle-Nabe-Verbindungen

Unter der Annahme einer konstanten Drehbelastung wirkt eine Drehungstorsion T an einer Welle mit durchmesserabhängigem Querschnitt.

Gegeben seien folgende Parameter:

- Wellenquerschnitt: solid, Durchmesser $d = 50$ mm
- Angewandte Last: Drehmoment $T = 420\ \mathrm{N \cdot m}$
- zulässige Schubspannung τ_{allow} für Teilaufgabe b: 90 MPa
- zulässige Schubspannung τ_{zul} für Teilaufgabe c: 120 MPa

a) Bestimmen Sie die maximale Torsionsschubspannung $\tau_{\max}$ an der Oberfläche der Welle.

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T\,r}{J}$$

$d = 50$ mm, $\quad T = 420\ \mathrm{N \cdot m}$

Hinweis: T ist in $\mathrm{N \cdot mm}$ umzuwandeln.

b) Bestimmen Sie den Mindestdurchmesser $d_{\min}$, sodass $\tau_{\max} \leq \tau_{\mathrm{allow}} = 90$ MPa.

$$\tau_{\max} = \frac{16\,T}{\pi\,d^3}$$

$$d_{\min} = \left(\frac{16\,T}{\pi\,\tau_{\mathrm{allow}}}\right)^{1/3}$$

T in Nmm, $\quad \tau_{\mathrm{allow}} = 90$ MPa

c) Unter der gegebenen Zulässigkeit $\tau_{\mathrm{zul}} = 120$ MPa bestimmen Sie den statischen Sicherheitsfaktor

$$N_s = \frac{\tau_{\mathrm{zul}}}{\tau_{\max}}$$

Aufgabe 2: Dynamische Festigkeitsnachweise von Wellen und Maschinenelementen

Betrachten Sie eine Welle unter zyklischer Torsionslast. Gegeben seien folgende Parameter:

- Wellenquerschnitt: solid, Durchmesser $d = 40$ mm
- zyklische Schubspannung: Amplitude $\tau_a = 120$ MPa, Mittelspannung $\tau_m = 0$ MPa
- Materialkennwerte (Basquin-Bereich): $\sigma'_f = 420$ MPa, $b = -0.10$
- Betriebslebensdauerziel: $N_{\text{ziel}} = 5 \times 10^7$ Zyklen

a) Bestimmen Sie aus der gegebenen Amplituden-Spannung τ_a die zugehörige Drehmomentamplitude T_a, die an der Welle entsteht.

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$\tau_a = \frac{T_a\, r}{J}$$

$$T_a = \tau_a \frac{J}{r}$$

$d = 40$ mm, $\quad \tau_a = 120$ MPa

b) Verwenden Sie die Basquin-Beziehung für die Schubspannung unter zyklischer Belastung

$$\tau_a = \sigma'_f \left(2N\right)^b$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_a}{\sigma'_f}\right)^{1/b}$$

$\tau_a = 120$ MPa, $\sigma'_f = 420$ MPa, $b = -0.10$

c) Diskutieren Sie, ob das Ziel N_{ziel} erreicht wird bzw. überschritten ist. Welche weiteren Maßnahmen könnten die Festigkeit erhöhen (ohne Lösung anzugeben)?

Lösungen

Aufgabe 1: Statische Festigkeitsnachweise von Wellen in Welle-Nabe-Verbindungen – Musterlösung

Unter den gegebenen Parametern werden die erforderlichen Größen schrittweise bestimmt.

a) Maximale Torsionsschubspannung $\tau_{\max}$ an der Oberfläche der Welle

Gegeben: - Durchmesser der Welle: $d = 50$ mm - Drehmoment: $T = 420\ \mathrm{N\cdot m} = 4.20 \times 10^5\ \mathrm{N\cdot mm}$

Wichtige Größen:

$$J \;=\; \frac{\pi d^4}{32}, \qquad r \;=\; \frac{d}{2}, \qquad \tau_{\max} \;=\; \frac{T\,r}{J}$$

Berechnungen (Numerische Werte):

$$J \;=\; \frac{\pi\,(50\ \mathrm{mm})^4}{32} \;=\; \frac{\pi \cdot 6{,}250{,}000}{32} \approx 6.13565 \times 10^5\ \mathrm{mm}^4$$

$$r \;=\; 25\ \mathrm{mm}$$

$$T \;=\; 4.20 \times 10^5\ \mathrm{Nmm}$$

$$\tau_{\max} \;=\; \frac{(4.20 \times 10^5) \cdot 25}{6.13565 \times 10^5} \;\approx\; 1.711 \times 10^1\ \mathrm{MPa} \;\Rightarrow\; \tau_{\max} \approx 17.1\ \mathrm{MPa}$$

Ergebnis:

$$\tau_{\max} \approx 17.1\ \mathrm{MPa}$$

b) Mindestdurchmesser $d_{\min}$ für $\tau_{\max} \le \tau_{\mathrm{allow}} = 90$ MPa

Für einen Vollwellenquerschnitt gilt:

$$\tau_{\max} = \frac{16\,T}{\pi\,d^3} \quad \Rightarrow \quad d_{\min} = \left(\frac{16\,T}{\pi\,\tau_{\mathrm{allow}}}\right)^{1/3}$$

Umrechnung von T in Nmm: $T = 4.20 \times 10^5$ Nmm

$$d_{\min} = \left(\frac{16 \cdot 4.20 \times 10^5}{\pi \cdot 90}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.72 \times 10^6}{282.743}\right)^{1/3} \approx (2.376 \times 10^4)^{1/3} \approx 28.8\ \mathrm{mm}$$

Ergebnis:

$$d_{\min} \approx 28.8\ \mathrm{mm} \quad \text{(auf 29 mm aufgerundet)}$$

c) Statischer Sicherheitsfaktor Unter der gegebenen Zulässigkeit $\tau_{\mathrm{zul}} = 120$ MPa ergibt sich:

$$N_s \;=\; \frac{\tau_{\mathrm{zul}}}{\tau_{\max}} \;=\; \frac{120}{17.1} \;\approx\; 7.0$$

Ergebnis:

$$N_s \approx 7.0$$

Zusammenfassung Aufgabe 1 - $\tau_{\max} \approx 17.1$ MPa bei $d = 50$ mm - $d_{\min} \approx 28.8$ mm (ca. 29 mm) für $\tau_{\max} \le 90$ MPa - Statischer Sicherheitsfaktor $N_s \approx 7.0$ bei $\tau_{\mathrm{zul}} = 120$ MPa

Aufgabe 2: Dynamische Festigkeitsnachweise von Wellen und Maschinenelementen – Musterlösung

a) Drehmomentamplitude T_a

Gegeben: - Querschnittsdurchmesser $d = 40$ mm - Schubspannungsamplitude $\tau_a = 120$ MPa

Wichtige Größen:

$$J = \frac{\pi d^4}{32}, \qquad r = \frac{d}{2}, \qquad \tau_a = \frac{T_a\, r}{J} \Rightarrow T_a = \tau_a \frac{J}{r}$$

Berechnungen:

$$J = \frac{\pi(40)^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2{,}560{,}000}{32} = 80{,}000\,\pi \approx 2.51327 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$r = 20 \text{ mm}$$

$$T_a = 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{2.51327 \times 10^5}{20} = 120 \cdot 12{,}566.3 \approx 1.508 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\Rightarrow T_a \approx 1.508 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.508 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ergebnis:

$$T_a \approx 1.51 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\approx 1.51 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

b) Lebensdauer-Nachrechnung nach Basquin

Gegeben: - Basquinkennwerte: $\sigma'_f = 420$ MPa, $b = -0.10$ - Amplituden-Spannung $\tau_a = 120$ MPa

Basqus-Beziehung:

$$\tau_a = \sigma'_f\,(2N)^b$$

Nach Umstellen nach N:

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_a}{\sigma'_f}\right)^{1/b}$$

Berechnungen:

$$\frac{\tau_a}{\sigma'_f} = \frac{120}{420} = 0.285714\ldots$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{-0.10} = -10$$

$$N = \frac{1}{2}\,(0.285714)^{-10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0.285714}\right)^{10} = \frac{1}{2}\,(3.5)^{10}$$

Wert von $(3.5)^{10}$ liegt bei etwa 2.76×10^5. Damit

$$N \approx \frac{1}{2} \cdot 2.76 \times 10^5 \approx 1.38 \times 10^5$$

Ergebnis:

$$N \approx 1.38 \times 10^5 \text{ Zyklen}$$

c) Diskussion zum Ziel $N_{\text{ziel}} = 5 \times 10^7$

Vergleich:

$$N_{\text{ziel}} = 5 \times 10^7 \gg N \approx 1.38 \times 10^5$$

Das Ziel wird also bei den gegebenen Größen nicht erreicht; der Entwurf würde eine deutlich kürzere Lebensdauer erreichen als gefordert.

Mögliche Maßnahmen zur Erhöhung der Festigkeit bzw. Lebensdauer (ohne Lösung anzugeben): - Reduktion der Amplitudenbelastung τ_a durch Last- bzw. Geometrieoptimierung. - Erhöhung der Ermüdungsgestalt des Materials (z. B. Wärmebehandlung, Legierungsanpassung, verbessertes Gefüge). - Oberflächenbehandlung zur Einführung von Eigenspannungen bzw. verbleibenden Zugspannungen (z. B. Shot-Peening, Härten, Nitrieren). - Vergrößerung des Wanddickenquerschnitts oder Änderung der Geometrie zur Reduktion von Schubspannungen (stattdessen größere Durchmesser oder Rippen/Fillets). - Optimierung von Störstellen (Glättung von Kerben, Verringerung von Spannungskonzentrationen). - Einsatz eines Materials mit erhöhter Basquinfestigkeit oder einer geeigneten Prognosekonstante. - Berücksichtigung von Langzeit-/Mean-Stress-Effekten (z. B. Goodman-/Gerber-Korrektur) bei zukünftigen Auslegungen, falls mean stresses auftreten.

Ende der Musterlösung.