Übungsaufgabe

Residuensatz und Residuenberechnung mit Anwendungen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Residuensatz und Residuenberechnung mit Anwendungen

Im Folgenden befassen wir uns mit dem Residuensatz, Residuenberechnung und typischen Anwendungen in der Konturkomplexen Analysis. Es werden verschiedene Poletypen (einfach, mehrfach) betrachtet und konkrete Konturintegrale diskutiert, deren Werte sich über Residuen bestimmen lassen.

a) Sei

$$f(z) = \frac{z^3 - z}{z\,(z-1)\,(z-2)}.$$

Bestimme die Residuen von f an den Polen $z = 0,\ 1,\ 2.$ Verwende dazu die Residuenformel

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z),$$

und gib danach das Konturintegral

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz$$

an, wobei Γ die Pole $z = 0$ und $z = 1$ einschließt, aber $z = 2$ außerhalb lässt.

b) Betrachte

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 1}.$$

Bestimme die Residuen von g an den Polen $z = i$ und $z = -i$. Nutze diese Residuen, um das Konturintegral

$$\oint_{|z|=2} g(z)\,dz$$

zu berechnen.

c) Anwendung: Bestimme das Konturintegral

$$\oint_{|z|=3} \frac{z\,e^z}{(z-1)\,(z+2)}\,dz,$$

und gib die Residuen innerhalb des Konturs an, bevor du den Wert des Integrals angibst.

d) Sei

$$h(z) = \frac{e^z}{z\,(z-1)^2}.$$

Bestimme die Residuen in $z = 0$ und in $z = 1$. Diskutiere, wie der Residuensatz bei Mehrfachpolen angewandt wird (inklusive der entsprechenden Formel).

Aufgabe 2: Erweiterte Residuenberechnung und reale Kontur-Integrale

Betrachte meromorphe Funktionen und deren Residuen in einfachen und mehrfachen Polen. Ziel ist, Konturintegrale zu berechnen und reale Integrale über Konturen in der komplexen Ebene mittels Residuen zu evaluieren.

a) Sei

$$F(z) = \frac{e^z}{z\,(z-1)}.$$

Bestimme die Residuen in den Polen $z = 0$ und $z = 1$. Ziehe daraus das Integral

$$\oint_\Gamma F(z)\,dz$$

heraus, wobei Γ ein Kreis ist, der beide Pole einschließt.

b) Betrachte

$$K(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Berechne den Residuum $\operatorname{Res}(K, z = 1)$ unter Anwendung der Formel für Mehrfachpole

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{\,m-1}}{dz^{\,m-1}} \big[(z - z_0)^m f(z)\big],$$

wobei m die Ordnung des Pols ist. Anschließend bestimme das Kontur-Integral über einen Kreis, der $z = 1$ einschließt.

c) Evaluieren Sie das reale Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

mit Hilfe von Konturmethoden und dem Residuensatz. Skizzieren Sie die relevanten Konturen und die Anwendung des Satzes.

Aufgabe 3: Anwendungen des Residuensatzes in Physik- und Signalanwendungen

In diesem Abschnitt werden klassische Anwendungen des Residuensatzes in Physik oder Signalverarbeitung behandelt. Es wird erwartet, typische Integrale durch Residuen zu lösen und die Bedeutung der Pole im Frequenzraum zu verstehen.

a) Sei

$$L(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}.$$

Bestimme die Residuen in den Polen $z = i$ und $z = -i$ und berechne

$$\oint_{|z|=R} L(z)\,dz$$

für ein Kreis $R > 1$, der beide Pole enthält.

b) Betrachte das reale Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

Wende Konturmethoden an, um den Wert dieses Integrals zu bestimmen, und erläutere die Rolle der Pole im oberen Halbfeld.

c) Diskutiere kurz, wie Residuen verwendet werden können, um Diffusions- und Wellenprobleme in der komplexen Ebene zu modellieren, insbesondere im Zusammenhang mit Frequenzantworten und Stabilität von Systemen.

Lösungen

Aufgabe 1: Residuensatz und Residuenberechnung mit Anwendungen – Musterlösung

a) Sei

$$f(z) = \frac{z^3 - z}{z\,(z-1)\,(z-2)}.$$

Die Pole der Funktion sind bei $z = 0, 1, 2$ (allesamt einfache Pole). Zunächst vereinfache ich f durch Kürzen des gemeinsamen Faktors z:

$$f(z) = \frac{z^3 - z}{z\,(z-1)\,(z-2)} = \frac{z(z^2-1)}{z\,(z-1)\,(z-2)} = \frac{z^2-1}{(z-1)(z-2)}.$$

Da sich der Faktor z im Zähler und Nenner kürzt, ist $z = 0$ eine entfernbare Singularität (keine Polstelle). Ebenso kürzt sich auch der Faktor $(z-1)$ im Zähler mit dem Nenner, sodass $z = 1$ ebenfalls eine entfernbare Singularität ist. Folglich hat f an $z = 0$ und $z = 1$ den Residuensatzwert 0.

Berechnung der Residuen an den verbleibenden relevanten Stellen via Residuenformel (für einfache Pole): - Pol $z = 0$: Von der Kürzung folgt, dass $z = 0$ kein echter Pol ist; $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. - Pol $z = 1$: Ebenfalls eine entfernbare Singularität; $\operatorname{Res}(f, 1) = 0$. - Pol $z = 2$:

$$\operatorname{Res}(f, z=2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{z^3 - z}{z(z-1)} = \frac{2^3 - 2}{2\,(2-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Damit lauten die Residuen

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 0, \qquad \operatorname{Res}(f, 1) = 0, \qquad \operatorname{Res}(f, 2) = 3.$$

Das Konturintegral über Γ, das die Pole $z = 0$ und $z = 1$ einschließt, aber $z = 2$ außerhalb lässt, ergibt dann

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\big(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)\big) = 0.$$

b) Betrachte

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}.$$

Die Pole von g liegen bei $z = \pm i$ (einfache Pole, da $z^2+1 = (z-i)(z+i)$).
Berechnung der Residuen:

$$\operatorname{Res}(g, z=i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} = \frac{\sin i}{i+i} = \frac{\sin i}{2i}.$$

Da $\sin(i) = i\sinh(1)$ gilt, folgt

$$\operatorname{Res}(g, z=i) = \frac{i\,\sinh(1)}{2i} = \frac{\sinh(1)}{2}.$$

Analog

$$\operatorname{Res}(g, z=-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} = \frac{\sin(-i)}{-i-i} = \frac{-\sin i}{-2i} = \frac{\sinh(1)}{2}.$$

Damit gilt

$$\oint_{|z|=2} g(z)\,dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res}(g, z=i) + \operatorname{Res}(g, z=-i)) = 2\pi i\left(\frac{\sinh(1)}{2} + \frac{\sinh(1)}{2}\right) = 2\pi i\,\sinh(1).$$

c) Berechnung des Konturintegrals

$$\oint_{|z|=3} \frac{z\,e^z}{(z-1)(z+2)}\,dz.$$

Die Pole liegen bei $z=1$ und $z=-2$ (beide innenliegend zu $|z|<3$).

Residuen berechnen:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z\,e^z}{(z-1)(z+2)}, z=1\right) = \left.\frac{z\,e^z}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1\cdot e}{3} = \frac{e}{3},$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z\,e^z}{(z-1)(z+2)}, z=-2\right) = \left.\frac{z\,e^z}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{(-2)\,e^{-2}}{-3} = \frac{2}{3}e^{-2}.$$

Summe der Residuen:

$$\operatorname{Res}_{z=1} + \operatorname{Res}_{z=-2} = \frac{e}{3} + \frac{2}{3}e^{-2}.$$

Daraus folgt das Konturintegral

$$\oint_{|z|=3} \frac{z\,e^z}{(z-1)(z+2)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e}{3} + \frac{2}{3}e^{-2}\right) = \frac{2\pi i}{3}\left(e + 2e^{-2}\right).$$

d) Sei

$$h(z) = \frac{e^z}{z\,(z-1)^2}.$$

Es gibt einen einfachen Pol bei $z = 0$ und einen Doppelpol bei $z = 1$.

Residuen berechnen: - Residuum bei $z = 0$ (einfacher Pol):

$$\mathrm{Res}(h, 0) = \lim_{z \to 0} z\, h(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^0}{(-1)^2} = 1.$$

- Residuum bei $z = 1$ (Anwendung der Formel für Mehrfachpole $m = 2$):

$$\mathrm{Res}(h, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\big[(z-1)^2 h(z)\big] = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)\bigg|_{z=1} = \frac{e^z(z-1)}{z^2}\bigg|_{z=1} = 0.$$

Zusammengefasst:

$$\mathrm{Res}(h, 0) = 1, \qquad \mathrm{Res}(h, 1) = 0.$$

Hinweis zur Anwendung des Residuensatzes bei Mehrfachpolen: Für einen Pol der Ordnung m gilt

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{\,m-1}}{dz^{\,m-1}}\big[(z-z_0)^m f(z)\big].$$

Die Summe der Residuen der innerhalb eines Konturs liegenden Pole liefert dann $\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, z_k)$.

Ende Aufgabe 1.

Aufgabe 2: Erweiterte Residuenberechnung und reale Kontur-Integrale – Musterlösung

a) Sei

$$F(z) = \frac{e^z}{z\,(z-1)}.$$

Pole bei $z = 0$ und $z = 1$ (beide einfach).

Residuen: - $\operatorname{Res}(F, 0) = \lim_{z\to 0} zF(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z-1} = \frac{e^0}{-1} = -1$. - $\operatorname{Res}(F, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z} = \frac{e^1}{1} = e$.

Das Konturintegral über Γ, das beide Pole einschließt, ergibt

$$\oint_\Gamma F(z)\,dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(F, 0) + \operatorname{Res}(F, 1)\big) = 2\pi i\,(-1 + e) = 2\pi i\,(e - 1).$$

b) Betrachte

$$K(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Es gibt einen Doppelpol bei $z = 1$ (Ordnung $m = 2$).

Residuum bei $z = 1$ (Mehrfachpol):

$$\operatorname{Res}(K, z = 1) = \frac{1}{(2-1)!}\,\frac{d}{dz}\big[(z-1)^2 K(z)\big]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\,(z)\Big|_{z=1} = 1.$$

Damit gilt für einen Kreis, der $z = 1$ einschließt,

$$\oint_{|z|=R} K(z)\,dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i \quad (R > 1).$$

c) Evaluieren Sie das reale Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

mittels Konturmethoden und dem Residuensatz. Es gilt die klassische Resultatordnung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Sketch einer typischen Beweisführung (knapp): - Betrachte die Funktion $f(z) = e^{iz}/z$ mit Integration über eine Halbbann- oder Halbkreis-Kontur im oberen Halbebenen, ausgehend von der bekannten Methode zur Berechnung des PV-Integrals PV $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i\pi$. - Die Großkreis-Limite geht gegen null dank $\exp(iz) = \exp(ix - \Im z)$ für $\Im z > 0$, der Innenkreis um den Ursprung liefert eine halbe Umlaufung, die zu einem Beitrag von $i\pi$ führt. - Betrachte die Imaginärteil-Relation: $\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. - Daraus folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$ (in der sense of Cauchy Principal Value).

Ende Aufgabe 2.

Aufgabe 3: Anwendungen des Residuensatzes in Physik- und Signalanwendungen – Musterlösung

a) Sei
$$L(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}.$$
Die Pole von L liegen bei $z = \pm i$ (einfache Pole). Berechne die Residuen:

$$\mathrm{Res}(L, z=i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{ii}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i},$$
$$\mathrm{Res}(L, z=-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i(-i)}}{-i-i} = \frac{e^{1}}{-2i} = -\frac{e}{2i}.$$

Summe der Residuen:
$$\mathrm{Res}(L, z=i) + \mathrm{Res}(L, z=-i) = \frac{e^{-1}-e}{2i}.$$

Für ein Kreis $|z| = R$ mit $R > 1$ gilt daher

$$\oint_{|z|=R} L(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-1}-e}{2i}\right) = \pi\,(e^{-1}-e).$$

b) Betrachte das reale Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$
Mit der gleichen Konturwahl (Halbbereich oben) erhält man durch Residuensatz

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, z=i\right)\right) = \ 2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}\right) = \pi e^{-1},$$

und die reale Analogie ergibt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-1}.$$

Aus der Realitätsperspektive folgt die Real- bzw. Imaginärteilbildung. Die Rolle der Pole im oberen Halbfeld ist zentral für die Konvergenz der Integralkonturen.

c) Kurzbstimmung: Residuen helfen, Diffusions- und Wellengleichungen in der komplexen Ebene zu modellieren, insbesondere bei der Bestimmung von Frequenzantworten und Stabilität von Systemen. In der Praxis erscheinen Polstellen im Frequenzraum (komplexe Frequenzen) als Träger von Dämpfung/Phase. Die Residuen geben dabei die Beitragspotentiale der einzelnen Pole zu einem Konturwert an; sie ermöglichen Explizitberechnungen von inversen Transformationsformen (z. B. Laplace- oder Fourier-Transform), aus denen zeitliche Reaktionen, Entkopplungseffekte oder Stabilitätskriterien ablesbar sind. Insbesondere bei Antwortfunktionen von linearen zeitinvaranten Systemen liefern die Pole im Frequenzraum die Dämpfung (Realteil) und Frequenzverschiebung (Imaginärteil) der Moden.

Ende Aufgabe 3.