Übungsaufgabe

Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion

In diesem Abschnitt werden Grundlagen zu Mengen, Abbildungen und der vollständigen Induktion im Kontext des Kapitels „Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion“ behandelt. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

a) Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{0, 1, 2\}$. Definiere eine Abbildung $f : A \to B$ durch

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 2.$$

Bestimme:

(i) das Bild $f(A)$,

(ii) das Urbild von $\{0\}$, d.h. $f^{-1}(\{0\})$,

(iii) ob f injektiv und/oder surjektiv ist.

b) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$. Definiere $f : A \to B$ durch

$$f(1) = a, \quad f(2) = a, \quad f(3) = b.$$

Bestimme:

(i) ob f injektiv ist,

(ii) ob f surjektiv ist.

c) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Geben Sie Base Case und Induktionsschritt eindeutig an. Verwenden Sie eine starke Form der Induktion, falls gewünscht, und formulieren Sie den Induktionsschluss korrekt.

Aufgabe 2: Fortsetzung zu Mengen, Abbildungen und Abbildungen von Teilmengen

a) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{0, 1\}$. Definiere $f : A \to B$ durch

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 0.$$

Bestimme:

(i) das Bild $f(A)$,

(ii) das Urbild von $\{0\}$, d.h. $f^{-1}(\{0\})$,

(iii) ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

b) Sei $C \subseteq A$ mit $C = \{1, 3\}$ und $D \subseteq B$ mit $D = \{1\}$. *Bestimme*:

(i) $f(C)$,

(ii) $f^{-1}(D)$.

c) Sei $f : A \to B$ wie oben und sei $A' \subseteq A$ mit $|A'| = 2$. *Diskutiere* im Kurzzusammenhang, wie sich Bild und Urbild in Abhängigkeit von der Größenordnung der Mengen verhalten. Formulieren Sie notwendige Aussagen über Bild, Urbild und Injektivität/Surjektivität.

Aufgabe 3: Ergänzende Anwendungen der vollständigen Induktion

a) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

b) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ gilt

$$2^n \leq n!$$

(Verwenden Sie robusten Induktionsschritt, ggf. mit der Annahme für alle kleineren Werte).

c) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass die Summe der ersten n geraden Zahlen $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.

Lösungen

Aufgabe 1: Mengen, Abbildungen und vollständige Induktion

a)

(i) $f(A) = \{0, 1, 2\}$.

(ii) $f^{-1}(\{0\}) = \{1, 3\}$.

(iii) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

b)

(i) f ist nicht injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

c) Beweis durch Induktion:

- (Base Case) $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
- (Induktionsschritt) Sei $P(n)$ die Behauptung

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nehmen wir an, $P(n)$ gelte. Dann gilt

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Damit ist $P(n+1)$ wahr.

Aufgabe 2: Fortsetzung zu Mengen, Abbildungen und Abbildungen von Teilmengen

a)

(i) $f(A) = \{0, 1\}$.

(ii) $f^{-1}(\{0\}) = \{1, 3\}$.

(iii) f ist nicht injektiv, aber surjektiv.

b) Sei $C = \{1, 3\} \subseteq A$ und $D = \{1\} \subseteq B$.

(i) $f(C) = \{0\}$.

(ii) $f^{-1}(D) = \{2\}$.

c) Diskussion zur Größenordnung $|A'| = 2$:

- Der Wertebereich von $f(A')$ hat höchstens zwei Elemente: $|f(A')| \leq 2$.
- In diesem konkreten Fall ist $|f(A')| = 1\ genaudann, wenn A' = \{1, 3\}$ ist (beide Elemente laufen auf 0); ansonsten gilt $|f(A')| = 2$.
- Die Einschränkung $f|_{A'} : A' \to f(A')$ ist genau dann injektiv, wenn die beiden Elemente von A' auf verschiedene Bilder abgebildet werden; im gegebenen Fall gilt das für alle A' mit Ausnahme von $A' = \{1, 3\}$.
- Allgemein gilt außerdem: Für jedes $D \subseteq B$ ist $|f^{-1}(D) \cap A'|$ zwischen 0 und 2; insbeson-dere kann es 0, 1 oder 2 Elemente von A' treffen, je nach A' und D.

Aufgabe 3: Ergänzende Anwendungen der vollständigen Induktion

a) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

- (Base Case) $n = 1$: $1 = 1^2$.
- (Induktionsschritt) Angenommen $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Dann

  $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

  Somit gilt die Behauptung für $n+1$.

b) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ gilt

$$2^n \leq n!$$

(robuster Induktionsschritt, ggf. mit der Annahme für alle kleineren Werte).

- (Base Case) $n = 4$: $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$.
- (Induktionsschritt) Sei $2^n \leq n!$ für ein $n \geq 4$ wahr. Dann

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot n! \leq (n+1)\, n! = (n+1)!\,,$$

  weil $2 \leq n+1$ für $n \geq 1$. Also gilt $2^{n+1} \leq (n+1)!$ für alle $n \geq 4$.

c) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass die Summe der ersten n geraden Zahlen $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

- (Base Case) $n = 1$: $2 = 1 \cdot 2$.
- (Induktionsschritt) Angenommen $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$. Dann

  $$2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2),$$

  also gilt die Behauptung für $n+1$.