Übungsaufgabe

Zahldarstellungen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Zahldarstellungen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

Betrachte die drei Zahlbereiche der Zahldarstellungen: reelle Zahlen mit Dezimaldarstellungen, rationale Zahlen als spezielle Dezimaldarstellungen, sowie komplexe Zahlen der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Dezimaldarstellung reeller Zahlen Beschreibe, wie eine reelle Zahl durch eine Dezimaldarstellung beschrieben wird. Erläutere den Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen bezogen auf die Dezimalentwicklung. Formuliere eine Begründung, warum rationale Zahlen eine periodische oder endliche Dezimaldarstellung besitzen und irrational Zahlen eine nichtperiodische Dezimaldarstellung besitzen.

b) Rational vs. irrational – Beispiele und Belege Es sei α eine reelle Zahl. Belege bzw. beweise, dass

$$\sqrt{2} \quad \text{irrational ist.}$$

Begründe anschließend, dass eine rationale Zahl durch eine endliche oder periodische Dezimaldarstellung charakterisiert ist.

c) Komplexe Zahlen – Grundformen und Operationen Sei $z = a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Unterscheide die folgenden Darstellungen und Operationen:

$$\text{(i) Konjugierte :} \quad \overline{z} = a - b\,i$$

$$\text{(ii) Betrag :} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{(iii) Multipliziert mit dem Konjugierten :} \quad z\,\overline{z} = |z|^2$$

$$\text{(iv) Polarform :} \quad z = r\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big) = r\,e^{i\theta}, \quad r > 0,\ \theta \in (-\pi, \pi]$$

Gib zu $z = a + bi$ die jeweiligen Werte von $|z|$ und θ durch geeignete Formeln an.

d) Beispielaufgabe – Polarform und Zusammenhang mit der Konjugierten Betrachte $z = -3 + 4i$. Bestimme formal:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}, \quad \cos\theta = \frac{-3}{r}, \quad \sin\theta = \frac{4}{r}, \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Schreibe z in der Polarform $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ und verifiziere die Gleichung

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = r^2.$$

Aufgabe 2: Reelle Zahlen – Dichte, Mengen und Abbildungen

In dieser Aufgabe vertiefen wir einige grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen und ihrer Bezugsgrößen.

a) Dichte der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ Zeige, dass zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ immer eine rationale Zahl q liegt, also $x < q < y$ mit $q \in \mathbb{Q}$.

b) Dreiecksungleichung für reelle Zahlen Beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

c) Betragsfunktion – Grundlegende Eigenschaften Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad |xy| = |x| \cdot |y| \quad (\forall\, y \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen – weitere Darstellungen

Diese Aufgabe vertieft die komplexe Zahlenwelt durch das Arbeiten mit Polarform, Potenzen und einfachen Identitäten.

a) Polarform eines konkreten Komplexen Gegeben sei $z = 1 - i$. Bestimme Betrag $r = |z|$ und Argument $\theta \in (-\pi, \pi]$. Schreibe z in der Polarform $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bzw. $z = re^{i\theta}$.

b) Einheitliche Darstellung – Einheitslänge Zeige, dass $w = \dfrac{z}{|z|}$ eine komplexe Zahl mit $|w| = 1$ ist. Gib eine allgemeine Form für w an, sofern $z \neq 0$.

c) Potenzen mittels De Moivre Sei $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ mit $r > 0$. Drücke z^n in Form von r^n und $\cos(n\theta), \sin(n\theta)$ aus. Hinweis: Verwende dazu De Moivre.

d) Beispiel – Mengennotiz zur Eulerform Nutze Eulerform, um z^4 für $z = -i$ zu berechnen. Notiere die Zwischenschritte in einzelnen, klar voneinander getrennten Formeln.

Lösungen

Lösungen zu Aufgabe 1: Zahldarstellungen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

a) Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Eine reelle Zahl wird durch eine Dezimaldarstellung beschrieben, d. h. sie hat eine Darstellung der Form

$$x = \pm d_0.d_1d_2d_3\ldots,$$

wobei $d_0 \in \mathbb{Z}$ und $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für alle $k \geq 1$ sind. Die Darstellung ist endlich, falls ab einem bestimmten Index alle Ziffern Null sind; ansonsten handelt es sich um eine unendliche Dezimaldarstellung.

Der wesentliche Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen in Bezug auf die Dezimalentwicklung: - Rationale Zahlen haben entweder eine endliche Dezimaldarstellung oder eine periodische (spätere Ziffernfolge wiederholt sich) Dezimaldarstellung. - Irrationale Zahlen haben niemals eine periodische Dezimaldarstellung; ihre Dezimalentwicklung ist nicht periodisch.

Begründung (Rationalität und periodische Endlichkeit): Sei $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ und $(p, q) = 1$. Bei der Division p/q entsteht eine Folge von Resten, die in jedem Schritt im Bereich $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ liegt. Es gibt genau q mögliche Reste; daher muss irgendwann ein Rest wieder auftreten, wodurch sich der nachfolgende Dezimalteil periodisch wiederholt. Falls der Divisionsvorgang jemals den Divisor ohne Rest beendet, besitzt die Dezimaldarstellung eine endliche Form. Umgekehrt lässt sich eine endliche oder periodische Dezimaldarstellung in einen Bruch überführen, womit rationale Zahlen genau durch endliche oder periodische Dezimaldarstellungen charakterisiert sind.

b) Rational vs. irrational – Beispiele und Belege

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$: Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational und in einfachster Form $\sqrt{2} = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1,\ q > 0$. Dann

$$2p^2 = q^2.$$

Folglich ist q^2 gerade, also ist q gerade. Setze $q = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$2p^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2k^2,$$

daraus folgt, dass p^2 gerade ist, also auch p gerade. Damitboth p und q durch 2 teilbar sind, widerspricht jedoch der Annahme, dass $\sqrt{2}$ in einfachster Form geschrieben wurde. Widerspruch, hence $\sqrt{2}$ ist irrational.

Begründung, dass eine rationale Zahl durch eine endliche oder periodische Dezimaldarstellung charakterisiert ist: Wie oben argumentiert, besitzt jede rationale Zahl p/q (mit $q > 0$) eine Dezimaldarstellung, deren Ziffernfolge entweder nach endlich vielen Stellen (Terminator) endet oder sich nach endlicher Vorlaufzeit periodisch wiederholt (periodisch). Umgekehrt lässt sich eine endliche oder periodische Dezimaldarstellung in einen Bruch überführen, sodass rationale Zahlen genau diese Eigenschaft besitzen.

c) Komplexe Zahlen – Grundformen und Operationen

Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) **Konjugierte**: $\overline{z} = a - bi.$

(ii) **Betrag**: $|\mathrm{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$

(iii) **Multipliziert mit dem Konjugierten**: $\mathrm{z}\,\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

(iv) **Polarform**: $\mathrm{z} = \mathrm{r}\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big) = r\,e^{i\theta}, \quad r > 0,\ \theta \in (-\pi, \pi].$

Gib zu $z = a + bi$ die jeweiligen Werte von $|z|$ und θ durch geeignete Formeln an:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}, \qquad \theta = \operatorname{atan2}(b, a) \in (-\pi, \pi].$$

d) Beispielaufgabe – Polarform und Zusammenhang mit der Konjugierten

Betrachte $z = -3 + 4i$. Dann

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5, \qquad \cos\theta = \frac{-3}{r} = -\frac{3}{5}, \qquad \sin\theta = \frac{4}{r} = \frac{4}{5}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Die Polarform lautet

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = 5\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = 5e^{i\theta},$$

wobei $\theta = \arccos(-3/5) = \arcsin(4/5) \approx 2.2143$ liegt (Quadrant II).

Bestätigung der Gleichung

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = r^2 = 25.$$

Lösungen zu Aufgabe 2: Reelle Zahlen – Dichte, Mengen und Abbildungen

a) Dichte der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$

Sei $x < y$ reell. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n(y-x) > 1$. Dann existiert ein ganzzahliger Wert m mit

$$nx < m < ny,$$

d. h. $x < \frac{m}{n} < y$. Damit gilt $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ und $x < q < y$. Somit ist zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl.

b) Dreiecksungleichung für reelle Zahlen

Zu zeigen: $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweisidee: Da beide Seiten nichtnegativ sind, genügt es, die Quadrate zu vergleichen:

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2,$$

denn $xy \leq |x||y|$ gilt immer. Daraus folgt $|x+y| \leq |x| + |y|$.

c) Betragsfunktion – Grundlegende Eigenschaften

Zeige $|x| \geq 0$ und $|xy| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Nichtnegativität: $|x| = \sqrt{x^2} \geq 0$.

Multiplikativität:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\ |y|.$$

Lösungen zu Aufgabe 3: Komplexe Zahlen – weitere Darstellungen

a) Polarform eines konkreten Komplexen

Gegeben sei $z = 1 - i$. Dann

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{-1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi].$$

Daraus folgt

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}.$$

b) Einheitliche Darstellung – Einheitslänge

Sei $z \neq 0$ und schreibe $z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$ mit $r = |z| > 0$. Dann

$$w = \frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},$$

und somit $|w| = 1$. Allgemeine Form für w ist also

$$w = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{mit} \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

c) Potenzen mittels De Moivre

Sei $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ mit $r > 0$. Dann

$$z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big), \qquad n \in \mathbb{N},$$

was der De Moivre-Formel entspricht.

d) Beispiel – Mengennotiz zur Eulerform

Nutze die Eulerform, um z^4 für $z = -i$ zu berechnen.

$$z = -i = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{2}),$$

also

$$z^4 = \big(\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{2})\big)^4 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1.$$