Übungsaufgabe

Zahlenfolgen, Konvergenz, Grenzwerte und Stetigkeit

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Grundlagen der Folgen und Grenzwerte

Betrachten Sie verschiedene Folgen und Grenzwerte. Diese Aufgaben decken das Teilthema *Zahlenfolgen, Konvergenz, Grenzwerte und Stetigkeit* ab.

a) Gegeben sei die Folge $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Bestimme den Grenzwert der Folge, falls existiert, und gib Begründung zur Konvergenz bzw. Nicht-Konvergenz an.

b) Die rekursive Folge ist definiert durch

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}, \quad x_1 = 1.$$

Bestimme, ob (x_n) konvergiert, und falls ja, bestimme den Grenzwert L.

c) Betrachte die Folge $a_n = 2^{1/n}$ für $n \geq 1$. Bestimme den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Formuliere eine Aussage zur Stetigkeit von f über Folgen: Falls (x_n) eine Folge mit $x_n \to x$ ist, dann gilt $f(x_n) \to f(x)$. Beantworte die Frage, ob die Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und erläutere, wie diese Eigenschaft eine Stetigkeit von f anzeigt.

Aufgabe 2: Grenzwerte von Funktionen mittels Folgen

a) Bestimme den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

b) Bestimme den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

c) Sei $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$. Bestimme $\lim_{x\to\infty} g(x)$ und diskutiere, ob der Grenzwert endlich existiert.

Aufgabe 3: Stetigkeit von Standardfunktionen via Folgen

a) Zeige, dass die Funktion $f(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, indem du Folgensequenzen verwendest: Sei $x_n \to x$ und zeige $f(x_n) \to f(x)$.

b) Sei $f(x) = |x|$. Zeige, dass f stetig an der Stelle $x_0 = 0$ mittels Folgen, d. h.Für jede Folge $x_n \to 0$ gilt $f(x_n) \to f(0)$.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es existiert kein Grenzwert der Folge, da zwei Untersammlungen unterschiedliche Grenzwerte besitzen:

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \longrightarrow 1 \quad (k \to \infty), \qquad x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \longrightarrow -1 \quad (k \to \infty).$$

Da zwei verschiedene Grenzwerte auftreten, konvergiert (x_n) nicht.

b) Sei $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2},\ x_1 = 1.$ Man zeigt zunächst induktiv, dass

$$1 \leq x_n \leq 2 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Da die Funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ monoton wachsend ist, folgt aus $1 \leq x_n \leq 2$ auch

$$1 \leq x_{n+1} = f(x_n) \leq f(2) = 2.$$

Zudem gilt für alle $x \in [1, 2]$ die Ungleichung

$$\sqrt{x+2} \geq x,$$

denn $g(x) = \sqrt{x+2} - x$ hat $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1 < 0$ und $g(2) = 0$; also $g(x) \geq g(2) = 0$ für $x \in [1, 2]$. Damit (x_n) monotone wachsend und nach oben durch 2 beschränkt, also konvergent. Sei $L = \lim x_n$. Dann

$$L = \lim x_{n+1} = \lim \sqrt{x_n + 2} = \sqrt{L + 2},$$

also $L^2 = L + 2$ und $L \in \{2, -1\}$. Da alle Glieder positiv sind, folgt $L = 2$. Hence $\lim x_n = 2$.

c) $a_n = 2^{1/n} = e^{(\ln 2)/n}$. Da $(\ln 2)/n \to 0$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1.$$

d) Sei $f(x) = x^2$. Die folgende Aussage gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: Falls (x_n) eine Folge mit $x_n \to x$ ist, dann gilt $f(x_n) \to f(x)$. Begründung:

$$|f(x_n) - f(x)| = |x_n^2 - x^2| = |x_n - x|\,|x_n + x|.$$

Da $x_n \to x$ eine Folge ist, ist $|x_n + x|$ beschränkt (etwa durch $|x| + |x_n| \leq |x| + |x| + 1$ für n groß), und $|x_n - x| \to 0$. Somit folgt $|f(x_n) - f(x)| \to 0$, d.h.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Begründung (Squeeze): Für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad (\text{mit } \cos x \to 1 \text{ bei } x \to 0).$$

Damit folgt durch das Einklemmen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Verwendung der Identität $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ liefert

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) $g(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$. Für $x \to \infty$ gilt

$$g(x) = \frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^2}{1+1/x^2} \to \infty \quad (\text{da } x^2 \to \infty).$$

Der Grenzwert existiert demnach nicht als endliche Zahl; $g(x)$ divergiert nach ∞.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Sei $f(x) = x^2$ und $x_n \to x$. Dann gilt

$$|f(x_n) - f(x)| = |x_n^2 - x^2| = |x_n - x|\,|x_n + x|.$$

Da $x_n \to x$, ist $|x_n|$ schließlich beschränkt, z.. $|x_n| \le |x| + 1$ für alle $n \ge N$. Damit

$$|f(x_n) - f(x)| \le |x_n - x|\,(|x_n| + |x|) \le |x_n - x|\,(2|x| + 1).$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle N so, dass $|x_n - x| < \varepsilon/(2|x|+1)$ für $n \ge N$. Dann folgt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ und somit $f(x_n) \to f(x)$. Die Stetigkeit von x^2 folgt.

b) Sei $f(x) = |x|$ und $x_n \to 0$. Dann gilt

$$|f(x_n) - f(0)| = ||x_n| - 0| = |x_n| \to 0,$$

also $f(x_n) \to f(0) = 0$. Damit ist f stetig an der Stelle $x_0 = 0$ (tatsächlich stetig auf ganz $\mathbb{R}$).