Übungsaufgabe

Reihen, unendliche Reihen und Potenzreihen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Reihen, unendliche Reihen und Potenzreihen

Betrachten Sie typische Reihenformen und deren Konvergenzverhalten. Die Aufgaben verteilen sich auf geometrische Reihen, p-Reihen, alternierende Reihen und Potenzreihen.

a) Geometrische Reihe

$$S(r) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} r^{\,n}.$$

- Geben Sie die Konvergenzbedingung in Abhängigkeit von r an. - Geben Sie eine allgemeine Ausdrucksform der Summe $S(r)$ an. - Berechnen Sie $S(r)$ für $r = \frac{1}{3}$.

b) p-Reihe Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

- Bestimmen Sie, für welche Werte von p die Reihe konvergiert bzw. divergiert. - Skizzieren Sie eine Begründung mithilfe geeigneter Konvergenztests.

c) Alternierende Reihe Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\,n+1}}{n}.$$

- Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe mittels eines passenden Tests. - Diskutieren Sie die Art der Konvergenz (falls relevant).

d) Potenzreihe und Randpunkte Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\,n}}{n}.$$

- Bestimmen Sie den Radius der Konvergenz R. - Untersuchen Sie die Konvergenz an den Randpunkten $x = R$ und $x = -R$ (falls sinnvoll).

Aufgabe 2: Potenzreihen und Randpunkte

Untersuchen Sie weitere Potenzreihen hinsichtlich Radius der Konvergenz und Randpunkten. Verwenden Sie dazu geeignete Tests (Wurzel- bzw. Quotienten- oder Integraltests).

a) Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

- Bestimmen Sie den Radius der Konvergenz R. - Untersuchen Sie die Konvergenz an den Randpunkten $x = R$ und $x = -R$ (falls sinnvoll).

b) Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Bestimmen Sie den Radius der Konvergenz R. - Begründen Sie, warum die Reihe für alle x konvergiert (Hinweis: Quotienten- bzw. Wurzeltest).

c) Alternierende Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

- Bestimmen Sie den Radius der Konvergenz R. - Diskutieren Sie Randpunkte, insbesondere $x = \pm 1$, unter Berücksichtigung der jeweiligen Tests.

Aufgabe 3: Anwendungen und Maclaurin-Reihen

Diese Aufgabe verbindet das Verständnis von Reihen mit typischen Anwendungen aus der Analysis.

a) Maclaurin-Reihe von e^x Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Maclaurin-Reihe von e^x und erläutern Sie, bis zu welchem Grad eine Näherung für kleine $|x|$ sinnvoll ist.

b) Die Reihe für $\ln(1+x)$ Beziehen Sie sich auf die Potenzreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

- Geben Sie den Konvergenzbereich an. - Untersuchen Sie die Randpunkte $x = \pm 1$ kritisch und diskutieren Sie die Konvergenz dort.

c) Maclaurin-Reihe von $\sin x$ Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Maclaurin-Reihe von $\sin x$ und erläutern Sie deren Verwendung für kleine $|x|$.

Lösungen

Lösungen zu Aufgabe 1

a) Geometrische Reihe

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + rS(r)$$
$$\Rightarrow S(r) = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

Für $r = \frac{1}{3}$ folgt

$$S\left(\tfrac{1}{3}\right) \;=\; \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \;=\; \frac{3}{2}.$$

b) p-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Konvergenz

$$\text{konvergiert} \iff p > 1, \quad \text{divergiert} \iff p \le 1.$$

Begründung (Integraltest):

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ \infty, & p \le 1. \end{cases}$$

Damit konvergiert die Reihe genau dann, wenn das Integral konvergiert. Die Reihe konvergiert absolut (und nur dann) für $p > 1$; für $p \le 1$ divergiert sie.

c) Alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Anwendung des Leibniz-Kriteriums: $a_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Also konvergiert die Reihe. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, konvergiert sie nicht absolut; die Konvergenz ist also nur bedingt konvergierend. Der Wert der Reihe ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

d) Potenzreihe und Randpunkte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

- Radius der Konvergenz: $R = 1$ (nach dem Quotienten- bzw. Wurzeltest). - Randpunkte: - $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. - $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (Alternating-Harmonic-Reihe) und liefert $-\ln 2$.

Damit gilt: Konvergenz bei $x \in [-1, 1)$.

Lösungen zu Aufgabe 2

a) Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

- Radius der Konvergenz $R = 1$. - Randpunkte: - $x = 1$: Divergenz (harmonische Reihe). - $x = -1$: Konvergenz (alternierende Harmonic-Reihe) mit Wert $-\ln 2$.

b) Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Radius der Konvergenz $R = \infty$ (konvergiert für alle x). - Begründung: Ratio-Test

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \text{(für jedes } x\text{)},$$

folglich konvergiert die Reihe absolut. Die Summe ist tatsächlich $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

c) Alternierende Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

- Radius der Konvergenz $R = 1$. - Randpunkte: - $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (zu $-\ln 2$). - $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. - Konvergenzbereich: $-1 < x \le 1$ (Intervall der Konvergenz $(-1, 1]$).

Lösungen zu Aufgabe 3

a) Maclaurin-Reihe von e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Erste fünf Glieder (bis x^4):

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Fehlerabschätzung (Lagrange-Form des Restglieds): Sei $R_4(x)$ das Restglied nach dem Grad-4-Taylorpolynom. Dann

$$|R_4(x)| \le \frac{e^{|\xi|}}{5!}|x|^5 \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen 0 und } x,$$

insbes. $|R_4(x)| \le e^{|x|} \frac{|x|^5}{5!}$.

b) Maclaurin-Reihe von $\ln(1 + x)$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

- Konvergenzbereich: $-1 < x \le 1$ (genau: im Rand $x = 1$ konvergiert, $x = -1$ divergiert). - Randpunkte: - $x = 1$: konvergiert gegen $\ln 2$. - $x = -1$: divergiert (termweise $(-1)^{n+1}(-1)^n = -1$; Harmonie-Term divergiert).

c) Maclaurin-Reihe von $\sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots .$$

Erste fünf Glieder (bis x^9):

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Anwendung: Für kleines $|x|$ liefert die Trunkierung eine gute Näherung, z. B. $\sin x \approx x$ für sehr kleine $|x|$. Restabschätzung (nach Taylor mit Rest): Falls der Taylor-Polynom der Ordnung 9 verwendet wird, gilt

$$|R_9(x)| \le \left| \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!} \right| |x|^{10} \le \frac{|x|^{10}}{10!},$$

weil $|f^{(10)}| = |\sin^{(10)}| \le 1$ ist.