Übungsaufgabe

Differentiation: Ableitung, Mittelwertsatz, Extremwerte und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Ableitung, Tangente, Monotonie

Betrachte die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a) Bestimme die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ unter Verwendung der Definition der Ableitung

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Gib den Grenzwert an und schreibe die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ im Punkt $x = 1$ in der Form $y = f(1) + f'(1)\,(x - 1)$.

b) Bestimme $f'(x)$ mit Hilfe der Potenzregel und schreibe $f'(x)$ vollständig nieder.

c) Bestimme die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ am Punkt $x = 1$ in der Explizitform $y = mx + b$ durch Ablesen von $f(1)$ und $f'(1)$. Gib die Werte von m und b an.

d) Finde die kritischen Stellen, d. h. Lösungen von $f'(x) = 0$, und ordne sie als lokale Extrempunkte ein (kann ggf. die zweite Ableitung oder Monotonie verwenden).

Aufgabe 2: Mittelwertsatz und Rolle

Sei f definiert durch $f(x) = x^3 - x$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

a) Formuliere den Mitteltwertsatz (MVT) und schreibe die Gleichung, deren Lösung $c \in (0, 2)$ aus dem Satz folgt.

b) Berechne die konkrete Gleichung

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

und bestimme eine geeignete $c \in (0, 2)$, die diese Bedingung erfüllt. (Gib eine exakte Lösung oder eine numerische Näherung an.)

c) Betrachte die Funktion $g(x) = \sin x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$. Beweise das Rolle-Theorem für g (d. h. g ist stetig auf $[0, \pi]$, differenzierbar in $(0, \pi)$ und $g(0) = g(\pi)$) und bestimme eine Stelle $c \in (0, \pi)$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgabe 3: Extremwerte und Anwendungen der Differentiation

a) Untersuche die Extremwerte der Funktion $h(x) = (x-1)^4$ auf $\mathbb{R}$. Bestimme die Lage der Extremstelle(n) und den dazugehörigen Funktionswert. Nutze ggf. höhere Ableitungen zur Typisierung.

b) Anwendungsbeispiel zur Optimierung: Sei die Kostenfunktion $C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ für eine Produktionsmenge $x \geq 0$ gegeben. Bestimme das Produktionsvolumen, das die Kosten lokal und global minimiert (verwende Ableitungen und Randfälle).

c) Taylor-Approximation: Bestimme das Taylorpolynom ersten Grades von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ und diskutiere die Gültigkeitsbereiche der Näherung für kleine Werte von $|x|$.

Lösungen

Aufgabe 1: Ableitung, Tangente, Monotonie

a) Aus der Definition der Ableitung

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}, \qquad f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Zunächst ist

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Es gilt

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 2(1+h) = \big(1 + 3h + 3h^2 + h^3\big) - 3\big(1 + 2h + h^2\big) + 2 + 2h.$$

Nach Kürzen erhält man

$$f(1+h) = -h + h^3.$$

Damit

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-h + h^3}{h} = -1 + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} -1.$$

Also $f'(1) = -1$. Die Gleichung der Tangente am Punkt $x = 1$ lautet

$$y = f(1) + f'(1)\,(x-1) = 0 - 1 \cdot (x-1) = -(x-1) = -x + 1.$$

b) Mit der Potenzregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(x^3 - 3x^2 + 2x\big) = 3x^2 - 6x + 2.$$

c) Aus $f(1) = 0$ und $f'(1) = -1$ folgt die explizite Tangente

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = -1\,(x-1) = -x + 1.$$

Damit sind $m = f'(1) = -1$ und $b = 1$.

d) Kritische Stellen: $f'(x) = 0$ gilt

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seien $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Da $f''(x) = 6x - 6$ gilt:

$$f''(x_1) = 6\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 = -2\sqrt{3} < 0 \quad \text{(lokales Maximum)},$$

$$f''(x_2) = 6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 = 2\sqrt{3} > 0 \quad \text{(lokales Minimum)}.$$

Die Funktionswerte liefern:

$$f(x_1) = f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \qquad f(x_2) = f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Aufgabe 2: Mittelwertsatz und Rolle

a) Mittelfristensatz (MVT): Falls f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) ist, existiert $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Für $f(x) = x^3 - x$ auf $[0, 2]$ gilt:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 0}{2} = 3.$$

b) Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 1$. Die Gleichung

$$f'(c) = 3 \quad \Longrightarrow \quad 3c^2 - 1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = \frac{4}{3},$$

also $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Da $c \in (0, 2)$ $liegt, ist c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155$.

c) Sei $g(x) = \sin x$ auf $[0, \pi]$. Dann ist g stetig auf $[0, \pi]$, diff. auf $(0, \pi)$ und $g(0) = g(\pi) = 0$. Somit erfüllt g die Voraussetzungen des Rolle-Satz. Es existiert ein $c \in (0, \pi)$ mit

$$g'(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 3: Extremwerte und Anwendungen der Differentiation

a) $h(x) = (x-1)^4$. Es gilt

$$h'(x) = 4(x-1)^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Für die Klassifikation genügt die Einsicht, dass $(x-1)^4 \geq 0$ für alle x mit $h(1) = 0$ und $h(x) > 0$ für $x \neq 1$. Da h' links von 1 negativ und rechts von 1 positiv ist, liegt dort ein globales Minimum vor. Aufgrund von $h(1) = 0$ ist dies zugleich das globale Minimum. Die Extremstelle ist damit

$$x = 1, \quad h(1) = 0.$$

b) Kostenfunktion $C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ für $x \geq 0$.

$$C'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2), \quad C''(x) = 12x - 18.$$

Kritische Stellen: $x = 1$ (Kosmetik: $C''(1) = -6 < 0$ lokales Maximum) und $x = 2$ ($C''(2) = 6 > 0$ lokales Minimum).

Werte:

$$C(0) = 5, \quad C(1) = 10, \quad C(2) = 9.$$

- Lokales Maximum bei $x = 1$ mit $C(1) = 10$. - Lokales Minimum bei $x = 2$ mit $C(2) = 9$. - Globales Minimum auf $[0, \infty)$ ergibt sich durch Randfall $x = 0$ (da $C'(0) = 12 > 0$ und $C(x) \to \infty$ für $x \to \infty$): Globales Minimum bei $x = 0$ mit $C(0) = 5$.

Damit ist das Produktionsvolumen, das die Kosten global minimiert, $x = 0$ (Kosten 5). Das lokal minimale Produktionsvolumen liegt bei $x = 2$ (Kosten 9).

c) Taylorpolynom ersten Grades von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$.

$$f(0) = \ln 1 = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1.$$

Das Taylorpolynom ersten Grades lautet

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x.$$

Gültigkeitsbereich: Die Maclaurin-Reihe von $\ln(1+x)$ besitzt Radius der Konvergenz 1, d. h. sie konvergiert für $-1 < x < 1$ (am Endpunkt $x = 1$ konvergiert sie gegen $\ln 2).DaheristdielineareNherungx$ auf diesem Intervall eine gute Approximation für kleine Werte von $|x|$. Allgemein gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad \text{für } |x| < 1.$$