Übungsaufgabe

Höhere Ableitungen, Taylorpolynom und Taylorreihe

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Höhere Ableitungen, Taylorpolynom und Taylorreihe

In diesem Teil sollen Sie die Konzepte höherer Ableitungen, Taylorpolynome und Taylorreihen für Funktionen einer reellen Variablen anwenden.

a) Für die Funktion $f(x) = e^x$ seien alle Ableitungen bekannt als $f^{(n)}(x) = e^x$. Bestimmen Sie $f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, 3$ und bilden Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f um $x_0 = 0$:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Schreiben Sie $P_3(x)$ explizit auf.

b) Für die Funktion $g(x) = \ln(1 + x)$ $(x > -1)$ bestimmen Sie $g'(0)$, $g''(0)$, $g'''(0)$ und bilden Sie das Taylorpolynom dritten Grades um $x_0 = 0$:

$$Q_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3.$$

Geben Sie die expliziten Koeffizienten an.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $h(x) = \arctan x$ um $x_0 = 0$. Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Reihe und geben Sie die Konvergenzbedingung bzw. den Radius der Taylorreihe an (ohne Lösung, nur Aufgabenstellung).

d) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots$ bis zur dritten Ordnung für eine Funktion Ihrer Wahl aus dem Feld der Analysis (Beispielvorschläge: $f(x) = \sqrt{1 + x}$ oder $f(x) = (1 + x)^\alpha$ oder eine andere glatte Funktion). Formulieren Sie die Aufgabe so, dass Sie die Ableitungen bis Ordnung 3 berechnen und das Polynom angeben.

Aufgabe 2: Anwendungen der Taylorreihen und Konvergenz

Diese Aufgabe behandelt die Nutzung von Taylorreihen in der Approximation und die Bestimmung von Konvergenzradien.

a) Verwenden Sie das Taylorpolynom vierten Grades von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$ zur Approximation von $e^{0,5}$ und geben Sie das Polynom $P_4(x)$ sowie die angenäherte Zahl $\hat{e}^{0,5}$ an. Geben Sie außerdem die Fehlerabschätzung (Restform in Lagrange-Form) an.

b) Zeigen Sie die Taylorreihe von $k(x) = \sin x$ um $x_0 = 0$ an und schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Reihe nieder. Bestimmen Sie außerdem die Konvergenzradien.

c) Für $q(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ leiten Sie die Taylorreihe her und schreiben Sie die ersten fünf Glieder. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

d) Betrachten Sie die Funktion $p(x) = (1 + x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie die ersten drei Terme der Taylorreihe um $x_0 = 0$ und diskutieren Sie den Konvergenzradius der allgemeinen Reihe.

Lösungen

Aufgabe 1: Höhere Ableitungen, Taylorpolynom und Taylorreihe

In diesem Teil sollen Sie die Konzepte höherer Ableitungen, Taylorpolynome und Taylorreihen für Funktionen einer reellen Variablen anwenden.

a) Lösung:

- Für $f(x) = e^x$ gelten alle Ableitungen $f^{(n)}(x) = e^x$. Folglich

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

- Das Taylorpolynom dritten Grades von f um $x_0 = 0$ ist

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

b) Lösung:

- Für $g(x) = \ln(1+x)$ $(x > -1)$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

  Damit

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -1, \quad g'''(0) = 2.$$

- Das Taylorpolynom dritten Grades um $x_0 = 0$ ist

$$Q_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = 0 + 1 \cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

c) Lösung:

- Die Taylorreihe von $h(x) = \arctan x$ um $x_0 = 0$ ist

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots .$$

- Die ersten fünf Glieder der Reihe sind

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}.$$

- Konvergenzbedingung bzw. Radius: Der Radius der Taylorreihe beträgt $R = 1$; die Reihe konvergiert für $|x| < 1$. (Endpunkte separater Prüfung vorbehalten; hier nur Radius.)

d) Lösung:

- Wähle eine glatte Funktion aus dem Feld der Analysis. Zum Beispiel

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}.$$

Berechne bis Ordnung 3:

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}.$$

Damit

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

Aufgabe 2: Anwendungen der Taylorreihen und Konvergenz

Diese Aufgabe behandelt die Nutzung von Taylorreihen in der Approximation und die Bestimmung von Konvergenzradien.

a) Lösung:

- Das Taylorpolynom vierten Grades von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$ ist

$$P_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

  Für $x = 0{,}5$ liefert

$$P_4(0{,}5) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} \approx 1{,}6484375.$$

  Die tatsächliche Zahl ist $e^{0{,}5} \approx 1{,}6487213$, daher liegt der Fehler bei der Restform.

- Restform (Lagrange): Es existiert ξ mit

$$R_4(0{,}5) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(0{,}5)^5 = \frac{e^\xi}{120}\,(0{,}5)^5 \quad \text{mit } \xi \in (0, 0{,}5).$$

  Aus einer Heizungsschätzung folgt

$$|R_4(0{,}5)| \le \frac{e^{0{,}5}}{120}\,(0{,}5)^5 = \frac{e^{0{,}5}}{120} \cdot \frac{1}{32} \approx 4.29 \times 10^{-4}.$$

b) Lösung:

- Die Taylorreihe von $k(x) = \sin x$ um $x_0 = 0$ ist

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots.$$

  Die ersten fünf Glieder sind

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}.$$

  Der Konvergenzradius ist $R = \infty$ (sinus- bzw. exakte Elementarfunktion ist ganz).

c) Lösung:

- Für $q(x) = \dfrac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$ gilt die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

  Die ersten fünf Glieder:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

  Der Konvergenzradius ist $R = 1$. Endpunkte: Bei $x = 1$ divergiert die Reihe; bei $x = -1$ erhält man $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, die nicht konvergiert.

d) Lösung:

- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Binomialreihe zu $(1+x)^\alpha$ lautet

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

  Die ersten drei Terme sind

$$1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2.$$

  Konvergenzradius der allgemeinen Reihe: $R = 1$ (für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$). Falls $\alpha \in \mathbb{N}_0$ endet die Reihe nach $\alpha + 1$ Termen und ist damit eine Polynomreihe mit unendlichem Radius.