Übungsaufgabe

Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Techniken der Integration, uneigentliche Integrale

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1: Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Techniken der Integration, uneigentliche Integrale

In dieser Aufgabe werden verschiedene Typen von Integralen behandelt, einschließlich unbestimmter Integrale, bestimmter Integrale, Techniken der Integration (Substitution, Partielle Integration, Partialbruchzerlegung) sowie uneigentliche Integrale.

a) Bestimme die Stammfunktion F von

$$f(x) = (3x^2 - x + 2)\, e^{-x},$$

und gib die Integrationskonstante C separat an.

b) Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\, dx.$$

c) Wende die Substitution $u = x^2$ an, um das Integral

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx$$

zu berechnen. Gib das Ergebnis in der Form $F(x) + C$ an.

d) Nutze die Methode der partiellen Integration, um das unbestimmte Integral

$$\int x\, e^{2x}\, dx$$

zu bestimmen. Gib $F(x)$ und C an.

e) Untersuche das uneigene Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Bestimme, ob es konvergiert, und falls ja, bestimme den Wert.

f) Untersuche das uneigene Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Bestimme die Konvergenz und erläutere gegebenenfalls den Divergenzwert.

Aufgabe 2: Techniken der Integration in Anwendungen

Zusätzliche Aufgaben zur sicheren Anwendung von Integrationsverfahren, einschließlich Substitution, Partialbruchzerlegung, Integration durch Teile sowie Umgang mit uneigentlichen Integralen.

a) Bestimme das unbestimmte Integral durch Substitution:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$

b) Verwende die Partialbruchzerlegung, um das Integral zu lösen:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}\,dx.$$

Gib eine Zerlegung in der Form $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$ an und integriere anschließend.

c) Integriere mit der Methode der Integration durch Teile:

$$\int x\,e^x\,dx.$$

d) Berechne das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

e) Uneigentliches Integral mit Exponentialabkühlung:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

Formuliere die Berechnung mit dem Grenzwert

$$\int_0^t e^{-x}\,dx \quad (t \to \infty).$$

f) Divergenz eines uneigentlichen Integrals:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Begründe die Divergenz.

Lösungen

Lösungen

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$F(x) = (-3x^2 - 5x - 7)\, e^{-x} + C,$$

denn

$$F'(x) = (-6x - 5)e^{-x} + (-3x^2 - 5x - 7)(-e^{-x}) = (3x^2 - x + 2)\, e^{-x}.$$

b) Mit

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = (1 - 1 + 1) - (0) = 1.$$

c) Substitution $u = x^2$, $du = 2x\, dx$:

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C.$$

d) Integration by parts:

$$\int x\, e^{2x}\, dx, \quad u = x,\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \tfrac{1}{2} e^{2x},\ du = dx.$$

Daher

$$\int x\, e^{2x}\, dx = x \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x} - \int \tfrac{1}{2} e^{2x}\, dx = \tfrac{x}{2} e^{2x} - \tfrac{1}{4} e^{2x} + C = e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C.$$

e) Uneigentliches Integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 0 - (-1) = 1,$$

also konvergent mit Wert 1.

f) Divergenz von

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Es gilt $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_\varepsilon^1 = -\ln \varepsilon \to \infty$ für $\varepsilon \to 0^+$; daher divergiert das Integral.

Aufgabe 2

a) Mit Substitution $u = x^2 + 1,\ du = 2x\, dx$:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln(x^2 + 1) + C.$$

b) Partialbruchzerlegung: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ und

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}.$$

Es gilt $2x+3 = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x + (-A+2B)$. Aus $A+B=2$ und $-A+2B=3$ folgt $B = \frac{5}{3},\ A = \frac{1}{3}$. Daraus

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C.$$

c) Integration durch Teile:

$$\int x\,e^x\,dx, \quad u = x,\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x,\ du = dx.$$

Also

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

d) Höchstwertbereich:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Beweismöglichkeit (skizzenhaft): Substitution $x = \sin\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; dann

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

e) Uneigentliches Integral mit Exponentialabkühlung:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = 1.$$

f) Divergenz eines uneigentlichen Integrals:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \quad \text{divergiert, da } \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon \to \infty \text{ für } \varepsilon \to 0^+.$$