Übungsaufgabe

Fourierreihen und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1: Fourierreihen und Anwendungen

Betrachten Sie eine 2π-periodische Funktion f mit der folgenden Eigenschaft:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi,$$

und f wird 2π-periodisch fortgesetzt.

a) Bestimmen Sie die trigonometrische Fourier-Reihe von f auf $(-\pi, \pi)$. Geben Sie die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

für $n \geq 1$ an. Danach schreiben Sie die Fourier-Reihe in der Form

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big).$$

b) Schreiben Sie die komplexe Fourier-Reihe von f und geben Sie Ausdruck

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx$$

an. Formulieren Sie diese zusammenhangsgemäß, ohne Werte auszurechnen.

c) Bestimmen Sie die Kosinus- bzw. Sinusreihe der geraden bzw. ungeraden Fortsetzung von f auf $[-\pi, \pi]$. Geben Sie die entsprechenden Koeffizienten an:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \geq 1).$$

d) Anwendung – Wärmeleitung auf einem ringförmigen Stab: Betrachten Sie die PDE

$$u_t = \alpha^2\, u_{xx}, \qquad -\pi < x < \pi,\ t > 0,$$

mit periodischen Randbedingungen $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$ und Anfangsverteilung $u(x, 0) = f(x)$. Geben Sie die formale Lösung als Fourier-Reihe an:

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}\, e^{-\alpha^2 k^2 t}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx.$$

Aufgabe 2: Halbbereichs-Fourierreihen und Signalanalysen

Betrachten Sie wieder eine periodische Funktion f mit Definitionsbereich $[-\pi, \pi]$.

a) Halbbereichs-Fourierreihen: Blicken Sie auf die Gerade bzw. ungerade Fortsetzung von f auf $[-\pi, \pi]$. Geben Sie die Kosinus-/Sinus-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

an (falls eine spezielle Fortsetzung gewählt wurde, adaptieren Sie die Integrationsgrenzen entsprechend).

b) Rekonstruktion eines Signals: Bilden Sie die endliche Fourier-Reihe

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big),$$

und diskutieren Sie die Wirkung von N auf die Annäherung an f (ohne Lösungswerte zu berechnen).

c) Komplexe Darstellung: Formulieren Sie die komplexe Darstellung von f auf $[-\pi, \pi]$ mit Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx, \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Lösungen

Aufgabe 1: Fourierreihen und Anwendungen (Lösung)

a) Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe von $f(x) = x$ auf $(-\pi, \pi)$

- Berechnung von a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

- Berechnung von a_n $(n \geq 1)$: Da $f(x) = x$ odd ist und $\cos(nx)$ gerade, ist $x\cos(nx)$ ungerade. Damit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0 \quad (n \geq 1).$$

- Berechnung von b_n $(n \geq 1)$: Da $f(x)$ und $\sin(nx)$ beide odd/ungerade Eigenschaften haben, ist $x\sin(nx)$ gerade, und

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

Durch einfache Partielle Integration erhält man

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n.$$

Damit

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

- Die trigonometrische Fourier-Reihe lautet damit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\,\sin(nx), \quad -\pi < x < \pi.$$

b) Kosinus-/Sinus-Reihe in der komplexen Form

- Komplexe Koeffizienten (für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$):

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\big(\cos(kx) - i\sin(kx)\big)\,dx.$$

Da $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\,dx = 0$ und $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = -\frac{2\pi}{k}(-1)^k$, folgt

$$c_k = \frac{1}{2\pi}(-i)\left(-\frac{2\pi}{k}(-1)^k\right) = \frac{i}{k}\,(-1)^k, \qquad k \neq 0.$$

Für $k = 0$ gilt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

- Form der komplexen Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{ikx} = \sum_{k\neq 0}\frac{i(-1)^k}{k}\,e^{ikx}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

c) Kosinus- bzw. Sinusreihe der geraden bzw. ungeraden Fortsetzung von f

Gerade Fortsetzung (Funktion $g(x) = |x|$ auf $[-\pi, \pi]$): - Koeffizienten der Kosinusreihe

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Damit gilt

$$|x| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(nx).$$

Man kann dies kompakter schreiben als

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2}.$$

Ungerade Fortsetzung (Funktion $f_o(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$): - Koeffizienten der Sinusreihe

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Damit gilt

$$f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin(nx), \quad -\pi < x < \pi.$$

d) Anwendung – Wärmeleitung auf einem ringförmigen Stab

Formale Lösung der PDE

$$u_t = \alpha^2\, u_{xx}, \qquad -\pi < x < \pi,\ t > 0, \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \quad u(x, 0) = f(x).$$

- Lösung als Fourier-Reihe besitzt die Koeffizienten c_k der Anfangsbedingung: Wie oben gezeigt, gilt

$$c_0 = 0, \qquad c_k = \frac{i(-1)^k}{k} \quad (k \neq 0).$$

- Formal weiter: Jede Fourier-Komponente e^{ikx} entwickelt sich gemäß $e^{ikx} \mapsto e^{ikx}e^{-\alpha^2 k^2 t}$. Daraus folgt

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}\, e^{-\alpha^2 k^2 t} = \sum_{k\neq 0} \frac{i(-1)^k}{k}\, e^{ikx}\, e^{-\alpha^2 k^2 t}, \quad t > 0,$$

mit dem Anfangswert $u(x, 0) = f(x) = \sum_{k\neq 0} c_k e^{ikx}$ (der Fall $c_0 = 0$ trägt nicht zur Anfangsverteilung bei).

Aufgabe 2: Halbbereichs-Fourierreihen und Signalanalysen (Lösung)

a) Gerade bzw. ungerade Fortsetzung von f auf $[-\pi, \pi]$

Gerade Fortsetzung (Funktion f_e, gleichmäßige Fortsetzung von f als gerade Funktion): - Kosinuskoeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx \quad (n \geq 1).$$

- Sinuskoeffizienten

$$b_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

da die Fortsetzung gerade ist.

Ungerade Fortsetzung (Funktion f_o, ungerade Fortsetzung von f als ungerade Funktion): - Cosinuskoeffizienten

$$a_n = 0 \quad (n \geq 0),$$

- Sinuskoeffizienten

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \geq 1).$$

b) Rekonstruktion eines Signals

Endliche Fourier-Reihe (N-Termien):

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big).$$

- Wirkung von N: Mit zunehmendem N nähert sich die Funktion der ursprünglichen fortgesetzten Signalfunktion an; Gibbs-Phänomen kann an Diskontinuitäten auftreten.

c) Komplexe Darstellung

- Komplexe Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx, \qquad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{ikx}.$$

Beachte: Die Koeffizienten hängen von der gewählten Fortsetzung ab; bei Gerader Fortsetzung erhält man eine rein Kosinus-Reihe, bei Ungerader Fortsetzung eine rein Sinus-Reihe, und die komplexe Darstellung liefert die allgemeine Form der Fourier-Reihe für die ursprüngliche Funktion auf $[-\pi, \pi]$.