Übungsaufgabe

Vektoren, Vektorräume, lineare Abbildungen, Dimension und lineare Unabhängigkeit

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Vektoren, Vektorräume, Basen, Dimension und lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben die Vektoren in $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$. Bestimme, ob sie linear unabhängig sind und gib eine Basis von $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sowie die Dimension dieses Unterraums an.

b) Betrachte den Unterraum

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

Finde eine Basis von W und bestimme die Dimension von W.

c) Sei $B = \{\mathbf{u}_1 = (1,2,0),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,1)\}$. Bestimme, ob B eine Basis von $W' = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ist. Falls nicht, gib eine Basis von W' und deren Dimension an.

d) Prüfe, ob die Menge $S = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,1,0)\}$ linear unabhängig ist. Falls nicht, gib eine Basis von $\text{span}S$ an und bestimme die Dimension.

e) Im Vektorraum der Polynome vom Grad 2, $P_2(\mathbb{R})$, zeige, dass die Menge $\{1,\ x,\ x^2\}$ eine Basis ist. Bestimme die Dimension von $P_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2: Lineare Abbildungen, Kern, Bild und Rang-Nullität

a) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Abbildungsmatrix in Standardbasis (hier gegeben), und finde $\ker T$ sowie $\operatorname{Im} T$. Gib die Dimensionen an.

b) Bestimme, ob T injektiv bzw. surjektiv ist. Belege deine Aussagen rein durch die Dimensionen von Kern und Bild.

c) Betrachte die Abbildung $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $\operatorname{Im} S$ und $\ker S$ sowie deren Dimensionen.

d) Beziehe dich auf den Rang-Nullität-Satz und gib eine kurze Feststellung zur Beziehung zwischen Rang, Nullität und der Dimension des Definitionsbereichs.

Aufgabe 3: Basenwechsel und Koordinaten

a) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Sei die Basis

$$B = \{\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0),\ \mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)\}.$$

Beweise, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimme die Koordinaten von $\mathbf{x} = (3, 2, 1)$ in dieser Basis (d.h. Finde c_1, c_2, c_3 mit $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3$).

b) Bestimme die Koordinatentransformationsmatrix von Standardkoordinaten zu B (so dass $[\mathbf{x}]_B = P\ [\mathbf{x}]_{\text{std}}$) und berechne P sowie die Koordinaten von $\mathbf{x}$ in B erneut.

c) Zeige, dass die Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen dieselbe lineare Abbildung repräsentieren, und kommentiere kurz die Bedeutung der Basenwahl für Koordinaten.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Vektoren, Vektorräume, Basen, Dimension und lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$. Es gilt

$$\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 + \gamma\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad (\alpha + \gamma,\ \beta + \gamma,\ 0) = \mathbf{0}.$$

Daraus folgen $\alpha = -\gamma$, $\beta = -\gamma$ und γ frei. Wähle $\gamma = 1$ zu Demonstrationszwecken, dann erhält man $-1\mathbf{v}_1$ $-1\mathbf{v}_2$ + $1\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, also eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit. Die Vektoren sind nicht linear unabhängig.

Damit spannt $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ (Z-Koordinaten der dritten Koordinate sind alle Null). Eine Basis des Spanns ist beispielsweise

$$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\} = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}.$$

Die Dimension des Unterraums ist $\dim(\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}) = 2$.

b) Der Unterraum

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

lässt sich parametrisieren durch $x = s,\ y = t$ und $z = t - s$. Also

$$(x, y, z) = (s, t, t - s) = s(1, 0, -1) + t(0, 1, 1).$$

Damit ist eine Basis von W gegeben durch

$$\{(1, 0, -1),\ (0, 1, 1)\},$$

und $\dim W = 2$.

c) Sei $B = \{\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0),\ \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)\}$. Dann ist

$$a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \iff (a - b,\ 2a + b,\ b) = \mathbf{0}.$$

Aus der dritten Koordinate folgt $b = 0$; daraus folgt $a = 0$. Also sind $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ linear unabhängig. Da $W' = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ definiert ist, bilden $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ eine Basis von W'. Dimension von W' ist damit 2.

d) Die Menge

$$S = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (1, 1, 0)\}$$

ist nicht linear unabhängig, denn $(1, 0, 0)+(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$. Eine Basis von $\operatorname{span} S$ ist $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}$, und $\dim(\operatorname{span} S) = 2$.

e) Im Vektorraum $P_2(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad 2 ist

$$p(x) = a + bx + cx^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

und

$$\{1,\ x,\ x^2\}$$

ist linear unabhängig, da $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$ für alle x nur dann gilt, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Damit ist $\{1,\ x,\ x^2\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$ und

$$\dim P_2(\mathbb{R}) = 3.$$

Lösung zu Aufgabe 2: Lineare Abbildungen, Kern, Bild und Rang-Nullität

a) Sei

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix in Standardbasis ist bereits gegeben. Zur Bestimmung von $\ker T$ lösen wir $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen folgt $x_1 = -x_2$ und $x_3 = -x_2$. Setze $t = x_2$. Dann

$$\mathbf{x} = t(-1,\, 1,\, -1)^\top.$$

Daraus ergibt sich

$$\ker T = \operatorname{span}\{(-1,\, 1,\, -1)\}, \qquad \dim\ker T = 1.$$

Für das Bild von T bilden die Spalten von A eine Erzeugendensystem für $\mathrm{Im}T$: $c_1 = (1,0)^\top,\ c_2 = (1,1)^\top,\ c_3 = (0,1)^\top$. Die Spalten $(1,0)^\top$ und $(1,1)^\top$ sind linear unabhängig, daher

$$\mathrm{Im}T = \mathbb{R}^2, \quad \dim \mathrm{Im}T = 2.$$

Eine mögliche Basis von $\mathrm{Im}T$ ist z.B. $\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$.

b) Da $\dim\ker T = 1 > 0$ ist, ist T nicht injektiv. Da $\dim \mathrm{Im}T = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ gilt, ist T surjektiv (Vollbild).

c) Sei

$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Spaltenbild von S ergibt

$$c_1 = (1,0)^\top,\ c_2 = (0,1)^\top,\ c_3 = (0,1)^\top,\ c_4 = (1,0)^\top.$$

Erzeugend ist damit $\mathrm{Im}S = \mathbb{R}^2$ (durch c_1, c_2). Also

$$\mathrm{Im}S = \mathbb{R}^2, \quad \dim \mathrm{Im}S = 2.$$

Für den Kern lösen wir $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt $x_4 = -x_1,\ x_3 = -x_2$. Mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, -x_2, -x_1)^\top$ erhält man

$$\ker S = \operatorname{span}\{(1,0,0,-1),\ (0,1,-1,0)\}, \quad \dim\ker S = 2.$$

d) Bezug auf den Rang-Nullität-Satz: Für lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

$$\mathrm{Rang}(S) + \mathrm{Nullitt}(S) = n.$$

Hier ist $n = 4$, $\mathrm{Rang}(S) = 2$ (Dimension des Bilds) und $\mathrm{Nullitt}(S) = 2$ (Dimension des Kerns), also $2 + 2 = 4$, wie vorgesehen.

Lösung zu Aufgabe 3: Basenwechsel und Koordinaten

a) Sei
$$V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{\mathbf{b}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{b}_2 = (1,1,0),\ \mathbf{b}_3 = (1,1,1)\}.$$
Die Matrix mit den Basiselementen als Spalten ist
$$M = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Sie ist oberhalb diaginale Matrix mit Einträgen 1 auf der Diagonalen, Determinante $1 \neq 0$; folglich ist B eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Gesucht: Koordinaten von $\mathbf{x} = (3,2,1)$ in der Basis B, d.h.
$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3.$$
Aus der Gleichung
$$c_1(1,0,0) + c_2(1,1,0) + c_3(1,1,1) = (3,2,1)$$
folgen
$$(c_1 + c_2 + c_3,\ c_2 + c_3,\ c_3) = (3,2,1).$$
Daraus ergibt sich
$$c_3 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_1 = 1.$$
Also
$$[\mathbf{x}]_B = (1,\ 1,\ 1)^\top.$$

b) Die Koordinatentransformationsmatrix von Standardkoordinaten zu B ist die Inverse von M, also
$$P = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Es gilt $[\mathbf{x}]_B = P\,[\mathbf{x}]_{\text{std}}$. Für $\mathbf{x} = (3,2,1)$ erhalten wir
$$[\mathbf{x}]_B = P\,[\mathbf{x}]_{\text{std}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
was mit dem vorherigen Ergebnis übereinstimmt.

c) Dass Koordinatenvektoren zu verschiedenen Basen dieselbe lineare Abbildung repräsentieren, ergibt sich daraus, dass der zugrunde liegende Vektor bzw. die Abbildung objektiv unabhängig von der Wahl der Koordinatenbasis ist. Sind zwei Basen B und B' von $\mathbb{R}^n$ gegeben, gibt es eine invertierbare Transitionsmatrix $P_{B\to B'}$ mit
$$[v]_{B'} = P_{B\to B'}[v]_B, \quad [T(v)]_{B'} = P_{B\to B'}[T(v)]_B.$$
Die Darstellungsmatrix von T ändert sich entsprechend, aber der Vektor $T(v)$ bleibt derselbe; die Wahl der Basis beeinflusst nur die Koordinaten, nicht die Abbildung selbst.