Übungsaufgabe

Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

Diese Aufgaben befassen sich mit der Matrixdarstellung linearer Gleichungssysteme, der Augmentierung und dem Gauss-Algorithmus (Gauss-Elimination und reduzierte Stufenform). Betrachte Systeme der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Formuliere das folgende lineare Gleichungssystem als Matrixgleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und schreibe die dazugehörige augmentierte Matrix $[A|\mathbf{b}]$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme die reduzierte Zeilenstufenform (RREF) der augmentierten Matrix $[A|\mathbf{b}]$ mittels Gauss-Elimination. Gib nur die Struktur der Stufenform an, keine Lösungsausgabe.

c) Bestimme Rang(A) und Rang$[A|\mathbf{b}]$. Beurteile damit die Konsistenz des Systems (Endzustand der Gauss-Elimination reicht aus).

d) Bestimme, falls vorhanden, die Lösungsmenge des Systems. Formuliere sie ggf. in Parameterform.

Aufgabe 2: Determinante und Inverse durch Gauss-Verfahren

Untersuche ein gegebenes Quadratmatrix-System durch Gauss-Elimination, insbesondere die Determinante und die Invertierbarkeit.

a) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Determinante von A durch das Gauss-Verfahren (mithilfe von Drehsprüngen und Eliminierung). Bestimme anschließend, ob A invertierbar ist.

b) Falls $\det(A) \neq 0$, bestimme A^{-1} durch das Gauss-Jordan-Verfahren (d.h. das Ersetzen von A durch $[A \,|\, I]$ bis $[I \,|\, A^{-1}]$).

c) Erläutere, wie das Gauss-Verfahren mit der Determinante zusammenhängt: Welche Beziehung besteht zwischen den Pivot-Werten, Zeilenvertauschungen und dem Vorzeichen bzw. Betrag der Determinante?

Aufgabe 3: Gauss-Algorithmus mit Parametern

Untersuche ein parametrisierbares Linearsystem und analysiere, wie sich die Lösung je nach Parameter ändert.

a) Betrachte das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Untersuche, für welche Werte von t das System genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung besitzt. (Wende Gauss-Elimination an und nutze ggf. den Rang.)

b) Skizziere fallweise den Lösungsraum je nach Fall (ohne Lösungsdetails auszugeben). Welche Rolle spielt der Rang der Koeffizientenmatrix im Vergleich zum Rang der erweiterten Matrix in diesem Zusammenhang?

Lösungen

Aufgabe 1: Matrizen, lineare Gleichungssysteme und Gauss-Algorithmus

a) Die Matrix-Gleichung ist gegeben durch

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und die augmentierte Matrix lautet

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Gauss-Elimination zur reduzierten Zeilenstufenform (RREF) des augmentierten Matrizenpaares $[A|\mathbf{b}]$.

Durchführung (Auszüge):

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{1}{5}R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{24}{5} \end{pmatrix},$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{4}R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit hat die augmentierte Matrix die Form $[I_3|\,\mathbf{x}^*]$ und die rechte Seite liefert die Lösung $\mathbf{x}^* = (8/5,\ 3/5,\ -6/5)^T$. In der Aufgabenstellung war nur die Struktur der Stufenform gefordert; hier ist die CO-Fassung eindeutig dreipolig reduziert.

c) Rangvon A und Rang von $[A|\mathbf{b}]$:

Aus der RREF der linken Matrix ist ersichtlich, dass die linke Matrix in Stufenform eine volle Ranghöhe von

$$\operatorname{rank}(A) = 3.$$

Da die rechte Spalte zu einer eindeutigen Lösung führt, gilt ebenfalls

$$\operatorname{rank}([A|\mathbf{b}]) = 3.$$

Folglich ist das lineare Gleichungssystem konsistent und eindeutig lösbar.

d) Lösungsmenge des Systems:

Die eindeutige Lösung ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Determinante und Inverse durch Gauss-Verfahren

Untersuche ein gegebenes Quadratmatrix-System durch Gauss-Elimination, insbesondere die Determinante und die Invertierbarkeit.

a) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Determinante von A durch das Gauss-Verfahren (mithilfe von Drehsprüngen und Eliminierung). Bestimme anschließend, ob A invertierbar ist.

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{8}{3}R_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ergibt sich als Produkt der Pivots (bei dieser Eliminationsreihenfolge ohne Zeilenvertauschungen):

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21 \neq 0.$$

Somit ist A invertierbar.

b) Falls $\det(A) \neq 0$, bestimme A^{-1} durch das Gauss-Jordan-Verfahren (d.h. $[A \,|\, I]$ zu $[I \,|\, A^{-1}]$).

Es ergibt sich das Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{11}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(Die Berechnung erfolgt durch Gauss-Jordan: Zunächst $[A|I]$ durch Elimination zu $[U|V]$ bringen, danach die Diagonalform von links zu I bringen und dabei die rechten Spalten entsprechend transformieren. Das Endresultat ist oben angegeben.)

c) Erläutere, wie das Gauss-Verfahren mit der Determinante zusammenhängt: Welche Beziehung besteht zwischen den Pivot-Werten, Zeilenvertauschungen und dem Vorzeichen bzw. Betrag der Determinante?

- Zeilenvertauschungen ändern das Vorzeichen der Determinante: Zeilenvertauschung multipliziert die Determinante mit -1. - Zeilenmultiplikationen mit einer Konstante c multiplizieren die Determinante mit c. - Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht (diese Operation ist determinantenerhaltend). - In einer typischen Gauss-Elimination erhält man eine obere Dreiecksmatrix U mit Diagonalenelementen p1, p2, p3 (den Pivots). Falls während der Eliminationsschritte keine Zeilenskalierung vorgenommen wird und keine Zeilentauschkombinationen auftreten, gilt det(A) = ±(p1 p2 p3), wobei das Vorzeichen von der Anzahl der Zeilentauschsfälle abhängt. - Wird doch eine Zeile durch eine Konstante skaliert (z. B. Ri := (1/7) Ri), muss dieser Skalierungsfaktor in der Bestimmung der Determinante berücksichtigt werden (Determinante wird entsprechend skaliert). In der vorliegenden

Berechnung wurde die linke Matrix durch Eliminationsschritte mit Additionen und einer späteren Skalierung operiert; die Pivot-Werte vor der Skalierung (1, 3, 7) liefern bei null Zeilentauschen $\det = 1{\cdot}3{\cdot}7 = 21$, was mit der direkten Berechnung übereinstimmt.

Aufgabe 3: Gauss-Algorithmus mit Parametern

Untersuche ein parametrisierbares Linearsystem und analysiere, wie sich die Lösung je nach Parameter ändert.

a) Betrachte das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Untersuche, für welche Werte von t das System genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung besitzt. (Wende Gauss-Elimination an und nutze ggf. den Rang.)

Durch Elimination (Augmented-Matrix)

$$[A|\mathbf{b}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -t \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1-t \end{pmatrix}.$$

Da die dritte Zeile rechts den Wert $1 - t$ und links 2 in der dritten Spalte enthält, ist der linke Anteil der dritten Zeile stets ungleich Null. Somit ist die Gleichung

$$2\,x_3 = 1 - t$$

immer eindeutig lösbar für jedes $t \in \mathbb{R}$ und liefert $x_3 = \frac{1-t}{2}$.

Fortsetzen (R2 und R1 entsprechend):

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & t \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 - x_3 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1-t \end{pmatrix},$$

mit $x_3 = \frac{1-t}{2}$ folgt

$$x_2 = 1 - x_3 = 1 - \frac{1-t}{2} = \frac{1+t}{2}, \qquad x_1 = t - x_2 = t - \frac{1+t}{2} = \frac{t-1}{2}.$$

Damit ergibt sich die lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-1}{2} \\ \frac{1+t}{2} \\ \frac{1-t}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b) Skizziere fallweise den Lösungsraum je nach Fall (ohne Lösungsdetails auszugeben). Welche Rolle spielt der Rang der Koeffizientenmatrix im Vergleich zum Rang der erweiterten Matrix in diesem Zusammenhang?

- Da das linke Matrix A eine volle Ranghöhe von $\mathrm{rank}(A) = 3$ besitzt und das erweiterte $[A|\mathbf{b}(t)]$ für jedes t denselben Rang hat ($\mathrm{rank}([A|\mathbf{b}(t)]) = 3$), existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung. Der Lösungsraum ist somit eine einzelne Punktlinie pro Parameterwert, d. h. es gibt kein parametrisch unendlich viele Lösungen oder keine Lösungen gemäß dem Rangkriterium.

- Folglich: Fall 1 (für alle $t \in \mathbb{R}$) gilt eindeutig lösbar; Rang(A)=Rang([A|b(t)])=3; der Lösungsraum besteht aus genau einem Vektor $\mathbf{x}(t)$ pro t. Der Parameter t erzeugt eine eindimensionale Familie von Lösungen, die als Kurve im Raum der Unbekannten beschrieben wird.