Übungsaufgabe

Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierung

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1: Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierung

In dieser Aufgabe betrachten Sie typische Vorgehensweisen zur Bestimmung von Determinanten, Eigenwerten und der Diagonalisierung von Matrizen. Arbeiten Sie sauber mit Namen der Objekte (A, λ, Eigenvektoren) und formulieren Sie die Bedingungen, unter denen eine Diagonalisierung existiert.

a) Gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ durch Lösen von $\det(A - \lambda I) = 0$.

iii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

iv) Prüfen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Falls ja, geben Sie eine Matrix P und eine Diagonalform D an, so dass $A = PDP^{-1}$.

b) Gegeben

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\det(B)$.

ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B durch das charakteristische Polynom $\det(B - \lambda I) = 0$.

iii) Bestimmen Sie zu jedem gefundenen Eigenwert einen Eigenvektor.

iv) Prüfen Sie, ob B diagonalisierbar ist. Falls ja, geben Sie eine Matrix P und eine Diagonalform D an, so dass $B = PDP^{-1}$.

c) Nicht diagonalisierbare Fallsituation (vertiefende Übung):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von C und deren algebraische Multiplizität.

ii) Zeigen Sie, dass die geometrische Multiplizität von $\lambda = 2$ kleiner als die algebraische Multiplizität ist.

iii) Konkludieren Sie, dass C nicht diagonalisierbar ist. Geben Sie, sofern möglich, eine Jordanform J und eine Matrix P mit $C = PJP^{-1}$ an.

Aufgabe 2: Diagonalisierung und Eigenschaften von Matrizen

Untersuchen Sie weitere typische Fälle der Diagonalisierbarkeit und interpretieren Sie diese im Kontext linearer Abbildungen.

a) Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\det(A_1)$ und die Eigenwerte.

ii) Zeigen Sie, dass A_1 diagonalisierbar ist. Geben Sie eine Matrix P und eine Diagonalform D an, so dass $A_1 = PDP^{-1}$.

b) Sei

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\det(A_2)$ und die Eigenwerte.

ii) Bestimmen Sie, ob A_2 diagonalisierbar ist. Erläutern Sie, welche Schlussfolgerung sich daraus ergibt, und geben Sie ggf. eine Form der Jordanzentrale an.

c) Sei

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_3 und deren algebraische Multiplizität.

ii) Beurteilen Sie die Diagonalisierbarkeit von A_3 über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

iii) Falls A_3 nicht diagonalisierbar ist, schildern Sie kurz den Aufbau einer möglichen Jordankette.

Lösungen

Aufgabe 1: Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierung

a)
Gegeben A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

i) $\det(A)$

$$\det(A) = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6.$$

ii) Eigenwerte λ durch $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2.$$

iii) Zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor Für $\lambda_1 = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es gilt $y = 0$ und x beliebig, daher

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gleichung $x + y = 0$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

iv) Diagonalisierbarkeit Da A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A diagonalisierbar. Eine Diagonalisierung

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(3, 2),$$

mit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erfüllt $A = PDP^{-1}$.

b)
Gegeben

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) $\det(B)$

$$\det(B) = 4\big(3 \cdot 2 - 1 \cdot 0\big) - 1\big(0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)\big) + (-2)\big(0 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)\big) = 24 - 1 + 6 = 17.$$

ii) Eigenwerte durch $\det(B - \lambda I) = 0$

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Berechnung liefert das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 17 = -(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 17).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms ergeben die Eigenwerte. Näherungsweise erhält man

$$\lambda_1 \approx 4.5315, \quad \lambda_2 \approx 3.3473, \quad \lambda_3 \approx 1.1212.$$

(Die Werte sind die reellen Nullstellen von $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 17 = 0$.)

iii) Zu jedem gefundene Eigenwert einen Eigenvektor Aus linearer Gleichung $(B-\lambda I)v = 0$ erhält man approximativ:

$$\lambda_1 \approx 4.5315: \quad v_1 \approx \begin{pmatrix} -3.878 \\ 1.000 \\ 1.532 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \approx 3.3473: \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} -0.467 \\ 1.000 \\ 0.347 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 \approx 1.1212: \quad v_3 \approx \begin{pmatrix} -1.651 \\ 1.000 \\ -1.879 \end{pmatrix}.$$

iv) Diagonalisierbarkeit Da B drei verschiedene reelle Eigenwerte besitzt, ist B diagonalisierbar (über $\mathbb{R}$):

$$P = \begin{pmatrix} -3.878 & -0.467 & -1.651 \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.532 & 0.347 & -1.879 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \approx \operatorname{diag}(4.5315,\ 3.3473,\ 1.1212),$$

und A P D P^{-1}.

c)
Nicht diagonalisierbare Fallsituation (vertiefende Übung):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Eigenwerte von C und deren algebraische Multiplizität

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ mit algebraischer Multiplizität } 2.$$

ii) Geometrische Multiplizität von $\lambda = 2$

$$C - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ker(C - 2I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also $\dim \ker(C - 2I) = 1$. Damit ist die geometrische Multiplizität kleiner als die algebraische Multiplizität.

iii) Folgerung C ist nicht diagonalisierbar. Die Jordankonstruktion liefert eine Jordanform $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C$ (ein einzelner Jordanblock der Größe 2). Eine Wahl von P mit $C = PJP^{-1}$ ist z. B. $P = I$ (dann $J = C$).

Aufgabe 2: Diagonalisierung und Eigenschaften von Matrizen

Untersuchen Sie weitere typische Fälle der Diagonalisierbarkeit und interpretieren Sie diese im Kontext linearer Abbildungen.

a) Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) $\det(A_1)$ und die Eigenwerte

$$\det(A_1) = 2 \cdot 5 = 10, \quad \text{Eigenwerte } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5.$$

ii) Diagonalisierbarkeit A_1 ist bereits diagonalisierbar (diagonal), z. B. $P = I$ und $D = A_1$, $A_1 = PDP^{-1}$.

b) Sei

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) $\det(A_2)$ und die Eigenwerte

$$\det(A_2) = 3 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 9, \quad \lambda = 3 \text{ (algebraische Multiplizität 2).}$$

ii) Diagonalisierbarkeit und Jordankern Nicht diagonalisierbar, da die geometrische Multiplizität von $\lambda = 3$ gleich 1 ist. Die Jordanzentrale ist

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

und eine passende Permutationsmatrix P (z. B. $P = I$) erfüllt $A_2 = PJP^{-1}$.

c) Sei

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Eigenwerte und algebraische Multiplizität Alle Diagonaleinträge sind 1, daher

$$\det(A_3 - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ mit algebraischer Multiplizität 3.}$$

ii) Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ Nicht diagonalisierbar, da $\dim \ker(A_3 - I) = 1$ (nur Eigenvektor multiples von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

iii) Falls nicht diagonalisierbar, Aufbau einer Jordankette Eine mögliche Jordankette ist von Länge 3. Die Jordanform ist

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3.$$

Eine Wahl von P mit $A_3 = PJP^{-1}$ ist z. B. $P = I$.