Übungsaufgabe

Lineare Differentialgleichungen und Lösungsverfahren

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Lineare DGL erster Ordnung und Lösungsverfahren

Betrachten Sie lineare DGL erster Ordnung der Form $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$. Für die folgenden Teilaufgaben nutzen Sie geeignete Lösungsverfahren (Integrationsfaktoren, Superposition etc.). Notieren Sie jeweils die Lösung inklusive eventueller Anfangsbedingungen.

a) Lösen Sie die Gleichung $y'(x) + 2\,y(x) = e^x$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Geben Sie die allgemeine Form der Lösung und die spezifische Lösung zur Anfangsbedingung an.

b) Lösen Sie die Gleichung $y'(x) - y(x) = \sin x$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

c) Beschreiben Sie, wie man für eine gegebene rechte Seite $q(x)$ die Lösung allgemein bestimmt. Nennen Sie die grundlegende Idee des Lösungsverfahrens, ohne konkrete Berechnungen durchzuführen.

d) Diskutieren Sie grob die Existenzaussagen: Unter welchen Bedingungen existiert eindeutig eine Lösung durch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ auf einem Intervall um x_0?

Aufgabe 2: Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachten Sie quadratische lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = g(x)$ mit reellen Parametern a, b und einer rechten Seite $g(x)$.

a) Lösen Sie die homogene Gleichung $y''(x)+3\,y'(x)+2\,y(x) = 0$ und beschreiben Sie die allgemeine Form der Lösung.

b) Lösen Sie die inhomogene Gleichung $y''(x)+3\,y'(x)+2\,y(x) = e^x$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

c) Geben Sie eine kurze Zuordnung der typischen Lösungsverfahren an, die für diese Art von Gleichungen verwendet werden können (ohne Details der Berechnungen).

Aufgabe 3: Lineare Differentialgleichungssysteme

Betrachten Sie lineare DGL-Systeme erster Ordnung der Form $\mathbf{u}'(x) = A\,\mathbf{u}(x)$ mit $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Betrachte das zweidimensionale System

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x), \\ u_2'(x) = -u_1(x), \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 1$. Bestimme die Funktionen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ (Beschreibe das Vorgehen, ohne die konkrete Lösung zu berechnen).

b) Diskutiere qualitativ das Verhalten der Trajektorien dieses Systems (Stabilität, Periodizität und typische Bewegungsverläufe).

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) Lösung der Gleichung $y'(x) + 2\,y(x) = e^x$ mit $y(0) = 1$.

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}, \qquad (\mu y)' = \mu q \;\Rightarrow\; (e^{2x}y)' = e^{2x}e^x = e^{3x}.$$

Integrieren liefert

$$e^{2x}y = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}.$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert

$$1 = y(0) = \frac{1}{3} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{2}{3},$$

somit

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x}}.$$

b) Lösung der Gleichung $y'(x) - y(x) = \sin x$ mit $y(0) = 0$.

Integrationsfaktor

$$\mu(x) = e^{-\int 1\,dx} = e^{-x}, \qquad (e^{-x}y)' = e^{-x}\sin x.$$

Es gilt

$$e^{-x}y = \int e^{-x}\sin x\,dx + C$$

und

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = e^{-x}\,\frac{-\sin x - \cos x}{2}.$$

Also

$$y(x) = \frac{-\sin x - \cos x}{2} + Ce^x.$$

Anfangsbedingung $y(0) = 0$ liefert

$$0 = y(0) = \frac{-0-1}{2} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2},$$

daher

$$\boxed{y(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{2}}.$$

c) Allgemeine Vorgehensbeschreibung (ohne konkrete Berechnungen).

Für eine lineare DGL erster Ordnung der Form $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ gilt: - Integrationsfaktor $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$. - Dann gilt $(\mu y)' = \mu q$; Integration liefert $\mu y = \int \mu q\,dx + C$. - Lösung: $y(x) = \mu(x)^{-1}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right)$.

d) Existenzaussagen (Eindeutigkeit).

Sei p, q stetig auf einem Intervall I mit $x_0 \in I$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ auf einem Intervall um x_0. Für lineare DGL gilt sogar globale Eindeutigkeit auf dem größten Intervall, in dem p, q stetig sind.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Homogene Gleichung
$$y''(x) + 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 0.$$

charakteristische Gleichung:

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (r+1)(r+2) = 0 \;\Rightarrow\; r = -1, -2.$$

Allgemeine Lösung der Homogenen:

$$\boxed{y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}.$$

b) Inhomogene Gleichung
$$y''(x) + 3\,y'(x) + 2\,y(x) = e^x.$$

Da e^x keine Lösung des homogenen Teils ist, wähle Ansatz

$$y_p(x) = Ae^x.$$

Es gilt
$$y_p' = Ae^x, \quad y_p'' = Ae^x,$$
Einsetzen: $Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = 6Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{6}$.
Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x}.$$

Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ liefern

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 0, \qquad y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x,$$

$$y'(0) = -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{6} = 0.$$
Aus dem linearen Gleichungssystem folgt (herausgerechnet)

$$C_1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad C_2 = \tfrac{1}{3}.$$

Daraus die gesuchte Lösung:

$$\boxed{y(x) = -\tfrac{1}{2} e^{-x} + \tfrac{1}{3} e^{-2x} + \tfrac{1}{6} e^x}.$$

c) Zuordnung typischer Lösungsverfahren (ohne Details der Berechnungen).

- Für g(x) mit Exponentialform e$^{\lambda x}$$(falls \lambda$ kein Wurzelwert des charakteristischen Polynoms) wähle $y_p = Ae^{\lambda x}$. Falls λ eine Wurzel des charakteristischen Polynoms ist, wähle $y_p = Axe^{\lambda x}$. - Für trigonometrische Rechtecke g(x)=cos$(\beta x) oder \sin(\beta x) whley_p = a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$. - Allgemein: Variation der Parameter als generische Methode.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{u}'(x) = A\,\mathbf{u}(x), \qquad \mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vorgehen (ohne konkrete Berechnung der Lösung): - Aus dem System ergibt sich durch Eliminieren eine 2. Ordnung für eine Komponente. Zum Beispiel

$$u_1'(x) = u_2(x), \quad u_2'(x) = -u_1(x) \quad \Rightarrow \quad u_1''(x) = u_2'(x) = -u_1(x),$$

also $u_1'' + u_1 = 0$. - Die allgemeine Lösung der 2. Ordnung lautet

$$u_1(x) = A\cos x + B\sin x.$$

- Dann folgt

$$u_2(x) = u_1'(x) = -A\sin x + B\cos x.$$

- Die Anfangsbedingungen $(u_1(0), u_2(0))$ würden die Parameter A, B eindeutig bestimmen.

b) Qualitative Trajektorienbetrachtung.

Für das 2D-System mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

handelt es sich um eine reine Drehung mit Winkeldrehung $\phi = x$ in der Ebene. Die Lösungen sind periodisch mit der Frequenz 1, die Trajektorien im Phasenraum (u1,u2) sind Kreise bzw. Ellipsen (in der Praxis wegen Linearität exakt Kreise um den Ursprung). Eigenschaften: - Stabiler zentrierter Typ (kein Dämpfen, keine Divergenz; keine asymptotische Stabilität). - Alle nicht-trivialen Trajektorien sind periodisch mit Periode 2π. - Energie $E = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$ ist konstant.