Übungsaufgabe

Harmonische Funktionen und der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Harmonische Funktionen und der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

In dieser Aufgabe untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen harmonischen Funktionen und holomorphen Funktionen. Eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen heißt harmonisch, wenn

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

gilt. Sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion mit $u, v : D \to \mathbb{R}$.

a) Definiere eine harmonische Funktion und formuliere die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

b) Zeige anhand der Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -\, v_x$$

dass sowohl u als auch v harmonisch sind, d. h. $\Delta u = \Delta v = 0$.

c) Betrachte die holomorphe Funktion $f(z) = z^2$ mit $z = x + iy$. Bestimme

$$u(x, y) = \Re(f(z)) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \Im(f(z)).$$

Zeige durch eine kurze Berechnung, dass $\Delta u = 0$.

d) Harmonic conjugate: Sei u harmonisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D. Erläutere, wie man eine harmonische Konjugierte v durch

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x$$

bestimmt und erläutere, warum $f = u + iv$ dann holomorph ist. Hinweis: Die Existenz von v ist lokal gegeben und global eindeutig bis zu einer additive Konstante.

Aufgabe 2: Zusammenhang durch CR-Gleichungen und Randwerte

In dieser Aufgabe vertiefen Sie den Zusammenhang durch die CR-Gleichungen und einfache Darstellungen harmonischer Funktionen in demonstrativen Beispielen.

a) Sei $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ holomorph in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Beweise, dass u harmonisch ist, d. h. $\Delta u = 0$ in D, indem du die CR-Gleichungen verwendest.

b) Betrachte das Beispiel $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ mit $z = x + iy$ und $z \in D = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Bestimme die Funktionen $u(x, y) = \Re f(z)$ und $v(x, y) = \Im f(z)$ formal und zeige, dass u in dieser Region harmonisch ist, d. h. $\Delta u = 0$.

c) Harmonic conjugate in der Einheitskugel: Betrachte u harmonisch im Distrikt $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ und sei v die harmonische Konjugierte, sodass $f = u + iv$ holomorph ist. Beschreibe die Kris-Raum-Methodik zur Bestimmung von v entlang eines Pfades in $\mathbb{D}$.

d) Poisson-Integral im Einheitskreis: Sei u harmonisch in $\mathbb{D}$ und auf dem Rand $|z| = 1$ gegeben durch eine Randfunktion $\phi(\theta)$. Formuliere die Poisson-Integral-Repräsentation

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, \phi(t)\, dt, \quad P_r(\xi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\xi + r^2}.$$

Wähle als Randwert $\phi(\theta) = \cos\theta$ und bestimme $u(r, \theta)$ explizit.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Harmonische Funktionen und der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

a) Definition und Laplace-Gleichung. Eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen heißt harmonisch, wenn

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } D,$$

wobei Δ der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Harmonizität von u und v aus CR-Gleichungen. Sei $f = u + iv$ holomorph in D. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen lauten

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -\, v_x.$$

Aus ihnen folgt

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}, \quad \text{und wegen der Gleichheit der gemischten Ableitungen } v_{yx} = v_{xy},$$

also

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Analog erhält man

$$v_{xx} = -u_{yx}, \quad v_{yy} = u_{xy}, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

da $u_{xy} = u_{yx}$.

c) Beispiel $f(z) = z^2$ mit $z = x + iy$. Es gilt

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

also

$$u(x, y) = \Re(f(z)) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \Im(f(z)) = 2xy.$$

Es folgt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0,$$

das heißt u ist harmonisch (und v ist auch harmonisch, da $\Delta v = 0$).

d) Harmonische Konjugierte und Holomorphie. Sei u harmonisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D. Eine harmonische Konjugierte v erfüllt

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x.$$

Dann gilt $f = u + iv$ holomorph. Die Existenz von v ist lokal gegeben und global eindeutig bis zu einer additiven Konstanten. Begründung: Die Form $\omega = -u_y\, dx + u_x\, dy$ besitzt

$$d\omega = -u_{yy}\, dx \wedge dy + u_{xx}\, dx \wedge dy = (u_{xx} - u_{yy})\, dx \wedge dy.$$

Für Harmonik $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ folgt $u_{xx} = -u_{yy}$ und damit $d\omega = 0$; in einfach zusammenhängenden Gebieten liefert dies eine Primitive, d.h. eine eindeutige Funktion v bis Konstante, die die CR-Gleichungen erfüllt. Damit ist $f = u + iv$ holomorph.

Lösung zu Aufgabe 2: Zusammenhang durch CR-Gleichungen und Randwerte

a) Beweis, dass u harmonisch ist, wenn $f = u + iv$ holomorph. Sei f holomorph in D. Dann gelten CR-Gleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Wie in 1a–1b folgt

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

da $v_{yx} = v_{xy}$. Somit ist u harmonisch in D.

b) Beispiel $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ mit $z = x + iy$ und $z \in D = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Für D gilt, dass f dort holomorph ist. Es gilt $f = u + iv$ mit

$$u(x,y) = \frac{x(1-x) - y^2}{(1-x)^2 + y^2}, \qquad v(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2},$$

denen man direkt durch Division der komplexen Terme erhält, nach der üblichen Konjugierten-Zehner-Methode. Da f holomorph ist, erfüllen u und v die CR-Gleichungen, weshalb $\Delta u = 0$ gilt (und auch $\Delta v = 0$).

Auskunft im Sinne der Aufgabenstellung: u ist harmonisch in der gegebenen Region, da f dort holomorph ist.

c) Harmonic conjugate in der Einheitskugel. Sei u harmonisch im Diskriminanten $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ und sei v die harmonische Konjugierte, sodass $f = u + iv$ holomorph ist. Die Bestimmung von v entlang eines Pfades $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ erfolgt über die CR-Gleichungen

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x.$$

Integriere entlang γ das 1-Form $\omega = -u_y\, dx + u_x\, dy$:

$$v(\gamma(t)) = v(z_0) + \int_{\gamma|_{[0,t]}} (-u_y\, dx + u_x\, dy).$$

Da u harmonisch ist, ist $d\omega = 0$ (analog zu 1d), und die Integration ist unabhängig vom Pfad in $\mathbb{D}$. Die Funktion v ist eindeutig bis additive Konstante bestimmt, und $f = u + iv$ ist holomorph.

d) Poisson-Integral im Einheitskreis. Gegeben sei u harmonisch in $\mathbb{D}$ mit Randwert $\phi(\theta)$ auf $|z| = 1$. Die Poisson-Repräsentation

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, \phi(t)\, dt, \quad P_r(\xi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\xi + r^2}$$

stellt die harmonische Ausführung sicher.

Wähle $\phi(\theta) = \cos\theta$. Verwende die Fourier-Reihe des Poisson-Kerns

$$P_r(\xi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\xi).$$

Dann

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) \right] \cos t\, dt.$$

Nur der Term mit $n = 1$ trägt bei, und man erhält

$$u(r, \theta) = r \cos \theta.$$

Damit ist die harmonische Fortsetzung von $\phi(\theta) = \cos \theta$ im Einheitskreis explizit

$$u(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{für } 0 \leq r < 1.$$