

Übungsaufgabe

Einführung in Stabtragwerke und Typen statisch
bestimmter Tragwerke

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Baustatik I

Aufgabe 1: Grundlagen der Stabtragwerke und Typen statisch bestimmter Tragwerke

Betrachten Sie Stabtragwerke, bei denen Stäbe ausschließlich axiale Kräfte tragen, Gelenke ideal als Drehgelenke modelliert werden und die Tragwerke in der Ebene liegen. Die folgenden Aufgaben führen in Typen statisch bestimmter Tragwerke ein und behandeln grundlegende Gleichgewichts- und Bestimmtheitsbedingungen.

a) Begriffe und Grundprinzipien

Beschreiben Sie in knappen Worten:

Was ist ein Stabtragwerk? Welche Rolle spielen Stäbe, Gelenke und Knoten?

Was bedeuten Aufbauprinzip, Schnittprinzip und Arbeitsprinzip in der Analyse von Tragwerken?

b) Typen statisch bestimmter Tragwerke

Nennen Sie drei typische Typen von Stabtragwerken und geben Sie zu jedem Typ kurze charakteristische Merkmale an (Axialkräfte, Gelenke, Verbindungen, typische Anwendungen).

c) Gleichgewichtsbedingungen am Knoten

Betrachten Sie einen Knoten eines Stabtragwerks, an dem Stäbe in bekannten Richtungen ansetzen. Formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen am Knoten:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Nennen Sie, welche Größen in diesen Gleichungen auftreten (Kräfte in Stäben, Reaktionskräfte an Auflagern, ggf. äußere Kräfte).

d) Statisches Bestimmtheit-Kriterium

Für ein ebene Stabtragwerk gilt typischerweise die Bedingung

$$m + r = 2j$$

bzw. im Spezialfall mit drei Reaktionskräften am Auflager

$$m = 2j - 3.$$

Erklären Sie kurz, was die Größen bedeuten (m = Anzahl Stäbe, r = Anzahl Reaktionskräfte, j = Anzahl Knoten) und wie diese Bedingung zur Beurteilung der Statisch Bestimmtheit herangezogen wird.

Aufgabe 2: Aufbau- und Typenunterscheidung statisch bestimmter Stabtragwerke

In dieser Aufgabe soll die Einordnung von Tragwerken in Typen und die Prüfung der Statisch bestimmtheit weiter vertieft werden.

a) Typische Trägerformen

Beschreiben Sie zwei konkrete Trägertypen (z. B. Dreiecksrahmen, Kastenrahmen) und erläutern Sie, warum sie typischerweise als statisch bestimmt oder statisch überbestimmt betrachtet werden. Begründen Sie Ihre Aussagen mit Bezug auf die Anzahl Stäbe, Knoten und Reaktionen.

b) Bestimmtheitsprüfung anhand gegebener Größen

Gegeben sei ein planer Stabtragwerk mit j Knoten, m Stäben und r Reaktionen an den Auflagern. Der einfache Indikator für statische Bestimmtheit lautet:

$$m + r \stackrel{?}{=} 2j.$$

Formulieren Sie, wie Sie vorgehen würden, um anhand gegebener Werte festzustellen, ob das Tragwerk statisch bestimmt, stabiles Gleichgewichtssystem oder problematisch überbestimmt ist.

c) Beispielhafter Numerical-Check (ohne Lösung)

Gegeben seien $j = 5$, $m = 7$ und $r = 3$. Bestimmen Sie, ob dieses Tragwerk gemäß dem oben genannten Kriterium statisch bestimmt ist, und benennen Sie ggf. den nächsten Schritt der Analyse (ohne Lösung anzugeben).

d) Typische Probleme und typische Lösungsansätze

Nennen Sie drei typische Probleme bei der Analyse statisch bestimmter Stabtragwerke und kurz die jeweils passenden Lösungsansätze (z. B. Gleichgewichtsbetrachtung an Knoten, Methode der Schnittgrößen, Prinzip der virtuellen Weggrößen) – ohne konkrete numerische Lösung.

Aufgabe 3: Grundlegende Gleichungen und Orientierungsgrößen in Stabtragwerken

Zur Vorbereitung auf die späteren Berechnungen in der Baustatik I sollen die grundlegenden Größen und Beziehungen beim Umgang mit statisch bestimmten Stabtragwerken klar benannt werden.

a) Grundgleichungen der Statik

Fassen Sie die drei Grundgleichungen der Statik zusammen, die bei der Analyse von Stabtragwerken genutzt werden (Knoten-Gleichgewichte in $\mathbb{R}^2$, Außenkräfte, Reaktionskräfte). Formulieren Sie in kurzer Form, wo die Abhängigkeiten liegen.

b) Knoten- und Schnittgrößen

Erklären Sie, welche Größen in der Regel als Unbekannte pro Knoten anzunehmen sind und wie diese mit den bekannten Größen (äußere Kräfte, Reaktionen) zusammenhängen. Geben Sie an, welche Rolle die Annahme der Axialkraft in Stäben spielt.

c) Prinzip der virtuellen Weggrößen (ohne Anwendung)

Geben Sie in Stichworten wieder, was das Prinzip der virtuellen Weggrößen bedeutet und wie es bei der Formulierung statisch bestimmter Tragsysteme hilfreich sein kann (ohne Rechenweg).

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) Begriffe und Grundprinzipien

- Stabtragwerk: Ein Tragwerk, dessen Stäbe ausschließlich axiale Kräfte tragen. Gelenke sind ideal als Drehgelenke modelliert und das Tragwerk liegt in der Ebene.
- Rolle der Stäbe, Gelenke und Knoten: Stäbe übertragen nur Zug- oder Druckkräfte entlang ihrer Längsachse; Gelenke ermöglichen Rotationsfreiheit zwischen Stäben; Knoten sind Verbindungsstellen, an denen mehrere Stäbe zusammentreffen.
- Aufbauprinzip, Schnittprinzip und Arbeitsprinzip:
 - Aufbauprinzip: Zerlegung des Tragwerks in einzelne Stäbe und Knoten zur Formulierung von Gleichgewichts- und Schnittgrößen.
 - Schnittprinzip: Durch Schnitte lassen sich Teilgrößen und innere Kräfte sichtbar machen, indem man Teilkörper mit den senkrechten Schnitten betrachtet.
 - Arbeitsprinzip: Die resultierende Geometrie und die Lastverteilung ergeben sich so, dass alle Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind; die Stabkräfte passen sich so an, dass die Struktur im Gleichgewicht bleibt.

b) Typen statisch bestimmter Tragwerke

- Typ 1: Dreiecksfachwerk (Fachwerkrahmen)
 - Merkmale: Dreiecksgeflechte aus Stäben, die axiale Kräfte tragen; Knotenpunkte sind Gelenke; wenige Freiheitsgrade, gut geeignet für stabile Tragwerke mit wenigen Stäben.
 - Anwendungen: Dachkonstruktionen, Brückenüberbau, kleinere Tragwerke.
- Typ 2: Kastenrahmen (rechteckiger Rahmen mit diag. Streben)
 - Merkmale: Geschlossener Rahmen aus Stäben, oft zusätzlich Diagonalen; Belastung verteilt sich über mehrere Stäbe; kann axiale Kräfte tragen, aber in Praxis oft auch Biegebelastungen an Gelenken, je nach Verbindungen.
 - Anwendungen: Türme, Rahmentragwerke in Gebäuden, Brückenrahmen.
- Typ 3: Portalrahmen (Rahmen mit überbrückenden Stäben)
 - Merkmale: Offenes oder halboffenes Rahmensystem mit horizontalen und vertikalen Stäben; Gelenke werden oft als Knoten mit axialer Tragwirkung modelliert; geeignet für weite Spannweiten.
 - Anwendungen: Hallenkonstruktionen, Brückenrahmen.

c) Gleichgewichtsbedingungen am Knoten

Für einen Knoten mit ansetzenden Stäben in bekannten Richtungen gilt das Knotengleichgewicht:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Dabei erscheinen in diesen Gleichungen typischerweise:

- Kräfte in Stäben (Projektion der axial wirkenden Kräfte auf x- bzw. y-Richtung),
- Reaktionskräfte an Auflagern,
- ggf. äußere Kräfte, die am Knoten wirken.

Die Gleichungen werden für jeden Knoten separat aufgestellt. Insgesamt ergibt sich ein lineares Gleichungssystem aus den Knotengleichgewichten.

d) Statisches Bestimmtheit-Kriterium

Für ein ebenes Stabtragwerk gilt typischerweise

$$m + r = 2j$$

mit

- m = Anzahl der Stäbe,
- r = Anzahl der Reaktionskräfte am Auflager,
- j = Anzahl der Knoten.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das System statisch bestimmt ist (eindeutige Lösung der Schnittgrößen ergibt). Im Spezialfall mit drei Reaktionskräften am Auflager gilt zusätzlich

$$m = 2j - 3.$$

Beide Formeln verknüpfen Geometrie (Knoten, Stäbe) mit den Randbedingungen des Systems und erlauben eine erste Einschätzung der Statisch Bestimmtheit.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Typische Trägerformen

- Typ 1: Dreiecksrahmen (Fachwerk)
 - Merkmale: Dreiecksgeflecht; Stäbe arbeiten ausschließlich axial; Gelenke sind Knoten; geringe Anzahl Stäbe sorgt oft für statische Bestimmtheit.
 - Begründung der Bestimmtheit: In der Regel $m = 2j - 3$ (bei drei Reaktionen am Auflager) – eine charakteristische Eigenschaft von Fachwerkstrukturen.
- Typ 2: Rechteckrahmen (Kastenrahmen) mit Diagonalstreben
 - Merkmale: Geschlossener Rechteckrahmen mit diagonalen Streben; axial beanspruchte Stäbe dominieren, Gelenke als Drehgelenke.
 - Begründung der Bestimmtheit: Die Diagonalen tragen maßgeblich zur Stabilität bei; je nach Anordnung kann der Rahmen statisch bestimmt oder überbestimmt sein.
- Typ 3: Portalrahmen (Rahmenkonstruktionen mit Balken und Stützen)
 - Merkmale: Offener Rahmen mit horizontalen/vertikalen Stäben; Konfigurationen mit Gelenken können statisch bestimmt sein, je nach Auflagerbedingungen und Diagonalen.
 - Anwendungen: Gebäudekonstruktionen, Industriehallen.

b) Bestimmtheitsprüfung anhand gegebener Größen

Gegeben seien j Knoten, m Stäbe und r Reaktionen an den Auflagern. Der einfache Indikator ist

$$m + r \stackrel{?}{=} 2j.$$

Vorgehen:

1. Zähle j (Knoten), m (Stäbe) und r (Auflagerreaktionen).
2. Vergleiche $m + r$ mit $2j$.

3. Falls
$$\begin{cases} m + r = 2j & \text{statisch bestimmt,} \\ m + r > 2j & \text{überbestimmt,} \\ m + r < 2j & \text{ungleichgewichts-/instabil,} \end{cases}$$

- Die Zuordnung kann zusätzlich an spezielle Randbedingungen (z. B. drei Reaktionen am Auflager) angepasst werden, wie in der Aufgabenstellung genannt.

c) Beispielhafter Numerical-Check (ohne Lösung)

Gegeben seien $j = 5$, $m = 7$ und $r = 3$.

$$m + r = 7 + 3 = 10, \quad 2j = 2 \cdot 5 = 10.$$

Da $m + r = 2j$ gilt, ist das Tragwerk statisch bestimmt. Der nächste Schritt der Analyse (ohne Lösung anzugeben) wäre, die Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten aufzustellen und die

Unbekannten (Axialkräfte in den Stäben) zu bestimmen, z. B. durch eine Knotengleichgewichtslösung oder durch die Methode der Schnittgrößen.

d) Typische Probleme und typische Lösungsansätze

Drei typischen Problemen stehen typischerweise folgende Lösungsansätze gegenüber:

- Problem 1: Redundanz durch zusätzliche Stäbe (Überbestimmtheit)
 - Lösung: Heranziehen des Schnittgrößenverfahrens oder virtuelle Weggrößen, ggf. Entfernen oder kombinierte Berücksichtigung redundanter Stäbe; Prüfen der Stabilität durch alternative Modelle.
- Problem 2: Instabilität durch falsche Geometrie oder Auflagerregelung
 - Lösung: Überprüfung der Auflagerreaktionen und Geometrie; ggf. Ergänzen von Diagonalen, um ausreichende Stabilität zu gewährleisten.
- Problem 3: Unklare oder mehrdeutige Knotengleichgewichte bei vielen Stäben pro Knoten
 - Lösung: Organisation der Gleichungen pro Knoten und systematische Aufstellung der Unbekannten; ggf. Vorauswahl redundanter Gleichungen vermeiden.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Grundgleichungen der Statik

Die drei Grundgleichungen der Statik für ein statisch bestimmtes, stabförmiges System lauten:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum M_O &= 0,\end{aligned}$$

wobei die erste und zweite Gleichung die Gleichgewichte der ganzen Struktur in der Ebene (x- bzw. y-Richtung) beschreiben und die dritte Gleichung das Gleichgewicht der Momente (mit Bezugspunkt O) beschreibt. Diese drei Gleichungen bilden die Basis für die Bestimmung der äußeren Reaktionen sowie der Schnittgrößen in den Stäben.

Im Detail gilt:

- Knoten-Gleichgewichte in $\mathbb{R}^2$ liefern je Knoten zwei Gleichungen (F_x, F_y). *Äußenkräfte und Reaktionskräfte*
- Die Innenkräfte in den Stäben erscheinen durch ihre Projektion auf die globalen Koordinatenrichtungen.

b) Knoten- und Schnittgrößen

Für jeden Knoten treten zwei Gleichungen auf (Summe der Kräfte in x- und y-Richtung). Die Unbekannten pro Knoten sind in der Regel die Axialkräfte der mit dem Knoten verbundenen Stäbe. Falls der Knoten an einer Auflage mit Reaktionen beteiligt ist, erscheinen dort zusätzlich Reaktionskräfte. Die Verknüpfung der Gleichgewichte an allen Knoten liefert das globale Gleichungssystem. Die Annahme, dass Stäbe nur axiale Kräfte tragen, bedeutet, dass die Kräfte in AB- bzw. BC-Richtungen der jeweiligen Stäbe verwendet werden und entsprechend an die Knoten weitergegeben werden.

c) Prinzip der virtuellen Weggrößen (ohne Anwendung)

Das Prinzip der virtuellen Weggrößen (virtuelles Arbeitprinzip) besagt grob: Bei einer stabilen, statisch bestimmten Struktur gilt, dass die Arbeit, die von äußeren Kräften bei einer zulässigen virtuellen Verschiebung verrichtet wird, gleich der internen virtuellen Arbeit ist. Formal lässt sich dies als Gleichung der virtuellen Arbeiten formulieren, wobei infinitesimale, zulässige Verschiebungen eingesetzt werden. Zweck ist hier primär konzeptionell: es erlaubt, Beziehungen zwischen Lasten, Verschiebungen und Kräften herzustellen, ohne den konkreten Rechenweg zu demonstrieren. In der Praxis dient es insbesondere der Begründung von Gleichungen für Schnittgrößen oder zur Ableitung von Verschiebungs- bzw. Deformationsbeziehungen in statisch bestimmten Systemen.