Übungsaufgabe

Modellierung von Stabtragwerken mit Knoten-Stab-Elementen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Modellierung von Stabtragwerken mit Knoten-Stab-Elementen

In dieser Aufgabe betrachten Sie ein einfaches dreiteiliges Knoten-Stab-System (Knoten A, B, C) mit drei Stäben AB, BC, CA. Die Stäbe liegen in der Ebene. Die Lagerungen führen zu statisch bestimmten Bedingungen. Eine vertikale Last wirkt am Knoten C nach unten.

Gegebene Geometrie: - Knoten A: A(0,0) - Knoten B: B(4,0) - Knoten C: C(2,3)

Stäbe: - AB verbindet A–B - BC verbindet B–C - CA verbindet C–A

Lagerung: - Knoten A ist ein festes Lager (Ax, Ay) - Knoten B ist ein Rollenlager in y-Richtung (By)

Äußere Last: - $F_C = 10$ kN wirkt am Knoten C nach unten.

Aufgabe 1a) Skizzieren Sie das Tragwerk und geben Sie die Orientierung der Stabkräfte in Abhängigkeit der Zugrichtung an (positiv = Zug).

1b) Formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung an den Knoten A, B und C. Verwenden Sie dabei die Stabkräfte N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} sowie die Reaktionskräfte A_x, A_y, B_y. Geben Sie die drei Gleichungen pro Knoten an (insgesamt 6 Gleichungen), sodass ein lineares Gleichungssystem entsteht.

1c) Bestimmen Sie die Axialkräfte der Stäbe N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} durch Anwendung des Gleichgewichtsprinzips (Schnittprinzip bzw. Knoten-Gleichgewichte). Geben Sie die Vorzeichenkonventionen explizit an.

1d) Diskutieren Sie das Tragverhalten des Systems: Welche Stäbe tragen überwiegend Zug- bzw. Druckkräfte? Welche Lagerreaktionen entstehen an A und B?

Aufgabe 2: Quadrat-Rahmen mit Diagonale als Knoten-Stab-System

Betrachten Sie ein quadratisches Knoten-Stab-System mit einer Diagonale, das eine weitere Geometrie zur Übung der Modellierung bietet. Die Stäbe liegen im Koordinatenquadrat und verbinden die Knoten im Sinne eines Knoten-Stab-Modells.

Gegeben geordnete Koordinaten: - Knoten A: A(0,0) - Knoten B: B(4,0) - Knoten C: C(4,3) - Knoten D: D(0,3)

Stäbe: - AB verbindet A–B - BC verbindet B–C - CD verbindet C–D - DA verbindet D–A - AC verbindet A–C (Diagonale)

Lagerung: - Knoten A ist ein Pin-Lager (Ax, Ay) - Knoten B ist ein Rollenlager in y-Richtung (By)

Äußere Last: - $F_D = 6$ kN wirkt am Knoten D nach unten.

Aufgabe 2a) Zeichnen Sie die Skizze des Rahmens und notieren Sie die Orientierung der Stabkräfte (positive Richtung = Zug).

2b) Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung an den Knoten A, B, C und D auf. Berücksichtigen Sie die Reaktionskräfte A_x, A_y, B_y sowie die Stabkräfte N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{DA}, N_{AC}.

2c) Bestimmen Sie die Axialkräfte der Stäbe N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{DA} und N_{AC} durch Anwendung des Schnittprinzips bzw. der Knoten-Gleichgewichte. Welche Stäbe wirken überwiegend in Zug bzw. in Druck?

2d) Kommentieren Sie die Bedeutung der Diagonalen AC für Stabilität und Lastabtragung in diesem Rahmen.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

1a) Orientierung der Stabkräfte (positive Richtung = Zug)
Für das dreiteilige Knoten-Stab-System mit den Stäben AB, BC, CA gilt: - N_{AB}: positive Werte bedeuten Zug in Stab AB (Knoten A zu Knoten B).
- N_{BC}: positive Werte bedeuten Zug in Stab BC (Knoten B zu Knoten C).
- N_{CA}: positive Werte bedeuten Zug in Stab CA (Knoten C zu Knoten A bzw. A zu C entsprechend der Signatur).
Die äußere Last F_C = 10 kN wirkt am Knoten C nach unten.

Kernaussage der Lösung: Die Stäbe werden durch das Tragwerk so belastet, dass der Knoten A zwei Reaktionen (Ax, Ay) besitzt, Knoten B eine Lagerreaktion By hat, und am Knoten C eine vertikale äußere Last wirkt.

1b) Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung (Knoten A, B, C, insgesamt 6 Gleichungen)
Konstruktion der Gleichgewichte mit den Stabkräften N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} und den Lagerreaktionen A_x, A_y, B_y (positiv = Zug):

Geometrie: - AB: A → B, Vektor (4,0), Länge 4, Einheitsvektor $\mathbf{e}_{AB} = (1, 0)$. - BC: B → C, Vektor (-2,3), Länge $\sqrt{13}$, $\mathbf{e}_{BC} = (-2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$. - CA: C → A, Vektor (-2,-3) von C nach A (bzw. A → C = (2,3)), Länge $\sqrt{13}$, Einheitsvektor $\mathbf{e}_{CA} = (-2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$.

Gleichgewichte:

Knoten A:

$$\begin{cases} A_x + N_{AB} + \frac{2}{\sqrt{13}} N_{CA} = 0 \\ A_y + \frac{3}{\sqrt{13}} N_{CA} = 0 \end{cases}$$

Knoten B:

$$\begin{cases} - N_{AB} - \frac{2}{\sqrt{13}} N_{BC} = 0 \\ B_y + \frac{3}{\sqrt{13}} N_{BC} = 0 \end{cases}$$

Knoten C (äußere Last F_C=10 kN nach unten):

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{13}} N_{BC} - \frac{2}{\sqrt{13}} N_{CA} = 0 \\ - 10 - \frac{3}{\sqrt{13}} N_{BC} - \frac{3}{\sqrt{13}} N_{CA} = 0 \end{cases}$$

Hinweis zur Last: F_C = 10 kN nach unten wird mit negativem y-Richtungseinfluss berücksichtigt.

1c) Bestimmung der Axialkräfte (Schnittprinzip/Knoten-Gleichgewichte)
Zuerst aus den Gleichungen zwischen Knoten C: - Von C_x: $\frac{2}{\sqrt{13}} N_{BC} - \frac{2}{\sqrt{13}} N_{CA} = 0 \Rightarrow N_{BC} = N_{CA}$.

Aus C_y und der Bedingung $N_{BC} = N_{CA}$:

$$-10 - \frac{3}{\sqrt{13}}(N_{BC} + N_{CA}) = 0 \Rightarrow -10 - \frac{6}{\sqrt{13}} N_{BC} = 0.$$

Damit

$$N_{BC} = N_{CA} = -\frac{10\sqrt{13}}{6} = -\frac{5\sqrt{13}}{3} \quad \text{(Einheit: kN)},$$

also Stäbe BC und CA wirken in Kompression (das Vorzeichen ist negativ gemäß der Zug-Positiv-Konvention).

Aus B_x:

$$-N_{AB} - \frac{2}{\sqrt{13}} N_{BC} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{13}} N_{BC} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \left(-\frac{5\sqrt{13}}{3} \right) = \frac{10}{3} \quad (\text{kN, in Zug}).$$

Aus B_y:

$$B_y = -\frac{3}{\sqrt{13}} N_{BC} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \left(-\frac{5\sqrt{13}}{3} \right) = 5 \quad (\text{kN}).$$

Aus A_y:

$$A_y = -\frac{3}{\sqrt{13}} N_{CA} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \left(-\frac{5\sqrt{13}}{3} \right) = 5 \quad (\text{kN}).$$

Aus A_x:

$$A_x = -N_{AB} - \frac{2}{\sqrt{13}} N_{CA} = -\frac{10}{3} - \frac{2}{\sqrt{13}} \left(-\frac{5\sqrt{13}}{3} \right) = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = 0 \quad (\text{kN}).$$

Zusammenfassung der Ergebnisse (Aufgabe 1c): - N_{AB} = 10/3 kN (in Zug) - N_{BC} = N_{CA} = -513/3 kN (in Kompression) - A_x = 0 kN, A_y = 5 kN - B_y = 5 kN

1d) Tragverhalten des Systems (Diskussion)
- Stäbe AB trägt Zug ($N_{AB} > 0$).
- Stäbe BC und CA wirken in Druck (N_{BC}, $N_{CA} < 0$).
- Die Lagerreaktionen umfassen eine horizontale Komponente nicht (A_x=0); A und B liefern jeweils eine vertikale Unterstützung von 5 kN, insgesamt 10 kN, die die Last von 10 kN nach unten am Knoten C kompensieren.
- Ergebnisbezug: Der Knotenzug führt zu einer konzertierten Lastabtragung über AB in Richtung BC/CA-Knoten, wobei AB in Zug und BC/CA in Druck arbeiten.

Lösung zu Aufgabe 2

2a) Orientierung der Stabkräfte (positive Richtung = Zug)
Für den quadratischen Knoten-Stab-Rahmen mit Diagonale AC gilt: - AB: horizontal, A $\rightarrow$ B - BC: vertikal, B $\rightarrow$ C - CD: horizontal, C $\rightarrow$ D - DA: vertikal, D $\rightarrow$ A - AC: Diagonale A $\rightarrow$ C

Diagonale AC hat positive Zugrichtung von A nach C.

2b) Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung (Knoten A, B, C, D)
Bezeichner wie zuvor, mit dem zusätzlichen Knoten D und der externen Last F_D = 6 kN nach unten.

Knoten A:

$$\begin{cases} A_x + N_{AB} + \frac{4}{5}N_{AC} = 0 \\ A_y + N_{DA} + \frac{3}{5}N_{AC} = 0 \end{cases}$$

Knoten B:

$$\begin{cases} -N_{AB} + 0 = 0 \\ B_y + N_{BC} = 0 \end{cases}$$

Knoten C:

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}N_{AC} - N_{CD} = 0 \\ -N_{BC} - \frac{3}{5}N_{AC} = 0 \end{cases}$$

Knoten D:

$$\begin{cases} N_{CD} = 0 \\ -6 - N_{DA} = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Die Gleichungen berücksichtigen die Geometrie und die Vorzeichen-Konventionen (positive Werte bedeuten Zug).

2c) Bestimmung der Axialkräfte (Schnittprinzip/Knoten-Gleichgewichte)
Aus Knoten D folgt unmittelbar: - $N_{CD} = 0$ (kein horizontales Gleichgewichtselement am D-Knoten außer CD), - $N_{DA} = -6$ kN (negativ bedeutet Kompression).

Aus Knoten B folgt: - $N_{AB} = 0$ (kein horizontales Gegenlager am B-Knoten).

Aus Knoten C folgt: - $-\frac{4}{5}N_{AC} - N_{CD} = 0 \Rightarrow N_{AC} = 0$ (mit $N_{CD} = 0$), - $-N_{BC} - \frac{3}{5}N_{AC} = 0 \Rightarrow N_{BC} = 0$.

Aus Knoten A folgt: - $A_x + N_{AB} + \frac{4}{5}N_{AC} = 0 \Rightarrow A_x = 0$ (mit $N_{AB} = 0, N_{AC} = 0$), - $A_y + N_{DA} + \frac{3}{5}N_{AC} = 0 \Rightarrow A_y = -N_{DA} = 6$ kN.

Zusammenfassung der Ergebnisse (Aufgabe 2c): - N_{AB} = 0 kN, N_{BC} = 0 kN, N_{CD} = 0 kN, N_{AC} = 0 kN - N_{DA} = -6 kN (Kompression) - A_x = 0 kN, A_y = 6 kN, B_y = 0 kN

2d) Bedeutung der Diagonalen AC für Stabilität und Lastabtragung
In dieser speziellen Last- und Randbedingungen fungiert die Diagonale AC als Z-Membr (Nullbelegung): AC trägt unter der vorliegenden reinen Vertikallast am Knoten D keinerlei Axialkraft. Die Lastabtragung erfolgt vollständig über DA (verbindet D mit A) zu den Lagerpunkten A (Ax, Ay) bzw. B (By). AC könnte bei anderen Lastfällen oder bei Lagemodifikationen eine aktivere Rolle spielen und die Tragfähigkeit bzw. Steifigkeit des Rahmens verbessern. Generell dient die Diagonale AC der Stabilisierung gegen Flächenverformungen und kann Lastpfade alternativ ergänzen oder verändern, insbesondere bei Seitenlasten oder geänderten Randbedingungen.