

Übungsaufgabe

Aufbauprinzip: Vorgehen zur Bestimmung von
Reaktionskräften und inneren Stabkräften

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Baustatik I
Erstellungsdatum:	September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Baustatik I

Aufgabe 1: Aufbauprinzip – Vorgehen zur Bestimmung von Reaktionskräften und inneren Stabkräften

Gegeben sei ein kleines planares Tragwerk mit drei Knoten A, B, C und drei Stäben AB, BC, CA. A ist Festlager (zwei Reaktionen: A_x, A_y) und C ist Loslager (eine Reaktion: C_y). Es liegt eine vertikale äußere Last P am Knoten B vor. Die Koordinaten des Dreiecks sind: $A = (0, 0)$, $B = (2\text{ m}, 2\text{ m})$, $C = (4\text{ m}, 0)$. Der Stab AB verbindet A–B, BC verbindet B–C und CA bildet die Diagonale des Dreiecks.

a) Beschreibe in drei Schritten das Aufbauprinzip, wie du vorgehen würdest, um die Reaktionskräfte zu bestimmen.

b) Bestimme die Reaktionskräfte A_x, A_y und C_y im Gesamtsystem durch Gleichgewichtsbedingungen. Nutze dazu die Gleichgewichte der gesamten Struktur ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$).

c) Bestimme die inneren Stabkräfte F_{AB}, F_{BC}, F_{CA} mithilfe der Schnitt- oder Gruppenmethode (Schnitt durch das Tragwerk, sodass der kinematisch zu lösende Teil nur wenige Unbekannte hat). Verwende die Gleichgewichte des entsprechenden Teils.

d) Prüfe bzw. erläutere, wie das Aufbauprinzip in diesem Beispiel mit dem Prinzip der virtuellen Weggrößen oder der virtuellen Kraftgrößen ergänzt werden könnte.

Aufgabe 2: Aufbauprinzip – Anwendung an einem Rahmentragwerk

Betrachte ein Rechteckrahment mit den Ecken $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(0,3)$. Die Lagerbedingungen sind: A Festlager (A_x, A_y) und B Loslager (B_y). Die Stäbe des Rahmens sind AB, BC, CD, DA sowie eine diagonale Stabschwerpunktverbindung AC (zusätzliche Stäbe). Es liegt eine vertikale äußere Last P am Knoten C vor.

a) Formuliere das Vorgehen des Aufbauprinzips für dieses Rahmentragwerk und beschreibe, welche Gleichgewichtsbedingungen zuerst herangezogen werden.

b) Bestimme die Reaktionskräfte A_x, A_y und B_y anhand der Gesamtebene.

c) Bestimme, ohne die vollständigen Berechnungen zu zeigen, die Stabkräfte der fünf Stäbe AB, BC, CD, DA, AC durch geeignete Schnitte bzw. Schnittgrößenmethoden.

d) Prüfe anhand der Anzahl der Stäbe m , der Knoten j und der Lagerreaktionen r , ob das Rahmentragwerk statisch bestimmt ist, und gib die Bedingung $m = 2j - 3$ bzw. r an.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Aufbauprinzip – Vorgehen zur Bestimmung von Reaktionskräften und inneren Stabkräften

a) Drei Schritte des Aufbauprinzips (ohne Aufgabenstellungen erneut wiederzugeben) - Schritt 1 (Gesamt-FBD): Erstelle das Freikörperbild der gesamten Tragstruktur, berücksichtige alle äußeren Lasten (hier P am Knoten B) sowie die Lagerreaktionen am A (A_x, A_y) und C (C_y). Nutze die Gleichgewichte $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ (bezüglich eines Breipunkts, z. B. A), um die Lagerreaktionen zu bestimmen. - Schritt 2 (Schnitt- bzw. Knotenmethode): Verwende die Schnitt- oder Knotenmethode, um die inneren Stabkräfte zu bestimmen. Wähle Schnitte so, dass im Teil der Beam-/Trägerstruktur nur wenige Unbekannte verbleiben; gelte die Gleichgewichte des jeweiligen Teils (z. B. $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$). - Schritt 3 (Validierung/Alternative Ansätze): Prüfe die Konsistenz der gefundenen Kräfte (z. B. durch einen weiteren Schnitt oder durch die virtuelle Weggröße bzw. virtuelle Kraftgrößen, falls nötig). Nutze ggf. den virtuellen Kraftgrößen-/Weggrößenansatz, um z. B. Displacement-Kopplungen oder Lastpfade zu prüfen.

b) Reaktionskräfte im Gesamtsystem - Gesamtmomente um A: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 4C_y - 2P = 0 \Rightarrow C_y = \frac{P}{2}$. - Vertikales Gleichgewicht: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - P = 0 \Rightarrow A_y = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$. - Horizontalgleichgewicht: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$ (keine äußeren horizontalen Kräfte vorhanden).

Damit lauten die Lagerreaktionen: - $A_x = 0$ - $A_y = \frac{P}{2}$ - $C_y = \frac{P}{2}$

c) Innere Stabkräfte F_{AB}, F_{BC}, F_{CA} - Freikörperjoint A (Stäbe AB und CA, mit Gleichgewicht an A und Berücksichtigung von $A_y = \frac{P}{2}$):

$$\begin{cases} \frac{F_{AB}}{\sqrt{2}} + F_{CA} = 0 \\ \frac{F_{AB}}{\sqrt{2}} + A_y = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{AB} = -\frac{P}{\sqrt{2}}, \quad F_{CA} = \frac{P}{2}.$$

Interpretation: F_{AB} ist kompressiv, F_{CA} ist zugfest.

- Freikörperjoint B (Stäbe AB und BC, externen Lasten am B berücksichtigen – hier keine horizontale Last; vertikale Last P liegt am Knoten B, aber sie wirkt in der Struktur über die Gesamtausleger):

$$-F_{AB} + F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{AB} = -\frac{P}{\sqrt{2}}.$$

Bestätigung über die vertikale Gleichgewichtsgleichung ergibt kohärente Ergebnisse.

- Freikörperjoint C (Stäbe BC und CA, äußere Reaktion $C_y = \frac{P}{2}$ berücksichtigen): Die Kräfte aus BC und CA sowie die Reaktion am C erfüllen das Gleichgewicht.

Endgültige Ergebnisse der Stabkräfte: - $F_{AB} = -\frac{P}{\sqrt{2}}$ (Kompression) - $F_{BC} = -\frac{P}{\sqrt{2}}$ (Kompression) - $F_{CA} = \frac{P}{2}$ (Zug)

d) Ergänzung durch das Prinzip der virtuellen Weggrößen bzw. virtuellen Kraftgrößen - Das Aufbauprinzip lässt sich durch das Prinzip der virtuellen Weggrößen ergänzen, um die Verformungen bzw. Kopplungen der Struktur zu prüfen. Konzeptionell wählt man eine virtuelle äußere Kraft Q an einer möglichen Verschiebungsrichtung (z. B. vertikale Verschiebung von Knoten B) und berechnet die virtuellen Stabkräfte f_{AB}, f_{BC}, f_{CA} im Tragwerk unter der virtuellen Last. Die Deflectionen lassen sich dann durch den Satz von der virtuellen Arbeit berechnen:

$$\delta_B = \frac{\sum_i F_i f_i L_i / (EA)_i}{Q},$$

wobei L_i die Längen der Stäbe, EA die Axialsteifigkeiten, und f_i die virtuellen Kräfte sind.

Dadurch erhält man eine Möglichkeit, Defekte oder Verformungen numerisch zu bewerten, ohne neue reale Lastwege zu definieren.

Lösung zu Aufgabe 2: Aufbauprinzip – Anwendung an einem Rahmentragwerk

a) Vorgehen des Aufbauprinzips für das Rahmentragwerk - Schritt 1: Freikörperbild der Gesamtkonstruktion inkl. Unterstützung am A (A_x, A_y) und B (B_y) sowie der äußeren Last am C (P). Schreibe die Gleichgewichte $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ zur Bestimmung der Lagerreaktionen. - Schritt 2: Reduziertes Freikörperbild bzw. Knotenmethode: Verwende ggf. Schnitte durch zwei Stäbe, um eine Teilstruktur mit höchstens zwei Unbekannten zu isolieren; löse systematisch die Stabkräfte. Da es sich um ein statisch bestimmtes Rahmentragwerk handelt (unter der gegebenen Geometrie und dem angenommenen Gelenkverbund), genügt in der Praxis die Knotenmethode. - Schritt 3: Prüfe die Stabkräfte durch Eignung von Schnitten bzw. prüfe die statische Bestimmtheit durch den Zusammenhang m, j, r (siehe Aufgabe 2d).

b) Reaktionskräfte im Gesamtsystem - Gleichgewichtsbedingungen (keine horizontale äußere Last):

$$A_x = 0, \quad A_y + B_y = P.$$

- Momentengleichgewicht um A: Die Lage des Knotens C ist (4, 3) und der Knoten B liegt bei (4, 0). Die Momentenwirkung des vertikalen Lastpfeils am C ist $4P$ (Gegenstück am B wirkt als Reaktion am B). Daraus folgt

$$4 B_y - 4P = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = P.$$

- Aus $\Sigma F_y = 0$ folgt

$$A_y = P - B_y = P - P = 0.$$

Damit sind die Lagerreaktionen: - $A_x = 0$, $A_y = 0$, $B_y = P$.

c) Stabkräfte der fünf Stäbe (AB, BC, CD, DA, AC) - Hinweis: Da es sich um ein statisch bestimmtes Rahmentragwerk handelt, reichen zwei Schnitte bzw. zwei Schnittgrößen, um die Unbekannten zu bestimmen. Ohne vollständige Berechnungen hier skizziert: - Wähle einen Schnitt, der zwei Unbekannte enthielt, z. B. einen senkrechten Schnitt durch AB und AD oder durch AB und BC in Kombination mit der bekannten Reaktion B_y . - Unter Beachtung von $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$ an den Teilstrukturen erhält man die Verteilung der Kräfte. - Endgültige Stabkräfte (als Ergebnisse der Schnitte, ohne ausführliche Rechenschritte): - $F_{AB} = 0$ - $F_{AD} = 0$ - $F_{AC} = 0$ - $F_{BC} = -P$ (Kompression) - $F_{CD} = 0$

Interpretation: Unter der gegebenen Lastführung lastet das gesamte Tragvermögen auf dem Stab BC, der $B_y = P$ über den Knoten B nach C führt. Die übrigen Stäbe bleiben nahezu unbelastet (Kräfte null) – dies kann bei dieser Klassen von Rahmentragwerken durchaus der Fall sein, wenn die Geometrie und die Gelenkverbindungen eine solche Lastabtragung ermöglichen.

d) Prüfung der Statischen Bestimmtheit - Anzahl der Stäbe: $m = 5$. - Anzahl der Knoten: $j = 4$ (A, B, C, D). - Lagerreaktionen: $r = 3$ (A_x, A_y, B_y). - Nach der Bedingung für statische Bestimmtheit eines planarträgerähnlichen Rahmentragwerks (Zweidimensionen, Gelenke): - statisch bestimmt, wenn $m = 2j - 3$ und $r = 3$ (für Gelenke mit starrer Knotenverbindung). - Hier gilt $2j - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 = m$, und $r = 3$. Damit ist das Rahmentragwerk statisch bestimmt.

Zusammenfassung der Lösung zu Aufgabe 2: - $A_x = 0$, $A_y = 0$, $B_y = P$. - Stabkräfte: $F_{AB} = 0$, $F_{AD} = 0$, $F_{AC} = 0$, $F_{BC} = -P$ (Kompression), $F_{CD} = 0$. - Das Tragwerk ist statisch bestimmt, da $m = 2j - 3$ ($5 = 5$) und $r = 3$.