Übungsaufgabe

Prinzip der virtuellen Kraftgrößen: Formulierungen, Aufgaben und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Prinzip der virtuellen Kraftgrößen: Formulierungen, Aufgaben und Anwendungen

In dieser Aufgabe werden Formulierungen des Prinzips der virtuellen Kraftgrößen vorgestellt, deren Zusammenhang mit dem Prinzip der virtuellen Weggrößen diskutiert und erste Anwendungen in statisch bestimmten Stabtragwerken skizziert.

a) Formuliere das Prinzip der virtuellen Kräfte in einer statischen Struktur. Schreibe die gängige Gleichung als lineare Form, die sich auf alle zulässigen virtuellen Verschiebungen bezieht.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \;=\; 0$$

b) Formuliere das Prinzip der virtuellen Weggrößen (Arbeitsprinzip der virtuellen Kräfte) in Bezug auf die Stäbe eines Planstrabs. Verwende die axialen Kräfte N_k in den Stäben und die virtuellen Längenänderungen δl_k.

$$\sum_{k=1}^{m} N_k \, \delta l_k \;=\; 0$$

c) Skizziere eine einfache Dreiecksstruktur mit den Stäben AB, BC und CA und zwei starren Lagerpunkten A und C. Beschreibe in kurzen Worten, welche virtuelle Verschiebung zulässig ist, wenn der Knoten B eine kleine horizontale Verschiebung δx_B erfährt, während A und C in ihren Lagerlinien verbleiben. Hinweis: Die virtuellen Längenänderungen der Stäbe ergeben sich aus der Geometrie der Verschiebung.

d) Nenne drei Arbeitsprinzipien der Mechanik und erläutere kurz deren Relevanz für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte in statischen Berechnungen.

Aufgabe 2: Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte an einem einfachen Fachwerk

Betrachte ein planare Fachwerk mit den drei Stäben AB, BC und CA, deren Gelenke A, B, C frei verschiebbar sind, wobei A und C an festen Lagerpunkten liegen. Eine äußere vertikale Einwirkung P wirkt am Knoten B nach unten. Das Fachwerk ist statisch bestimmt.

a) Beschreibe eine zulässige virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{r}_B$ des Knotens B in der Ebene, so dass die Knoten A und C als Lager unverändert bleiben ($\delta\mathbf{r}_A = \delta\mathbf{r}_C = \mathbf{0}$).

b) Leite die virtuellen Längenänderungen der Stäbe $\delta l_{AB}, \delta l_{BC}, \delta l_{CA}$ in Abhängigkeit von $\delta\mathbf{r}_B$ (verweist auf die Geometrie der Stäbe) auf. Formuliere z. B. Ausdrücke der Form

$$\delta l_{AB} = \frac{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \cdot \delta\mathbf{r}_B}{l_{AB}}, \quad \delta l_{BC} = \frac{(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) \cdot \delta\mathbf{r}_B}{l_{BC}}, \quad \delta l_{CA} = \frac{(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \cdot \delta\mathbf{r}_B}{l_{CA}}$$

falls eine solche Vektordarstellung sinnvoll gewählt ist.

c) Schreiben Sie die virtuelle Arbeitsgleichung gemäß dem Prinzip der virtuellen Kräfte. Verwende die externe kraft P und die axialen Kräfte N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} der Stäbe. Formuliere explizit

$$P\,\delta y_B \;+\; N_{AB}\,\delta l_{AB} \;+\; N_{BC}\,\delta l_{BC} \;+\; N_{CA}\,\delta l_{CA} \;=\; 0,$$

wobei δy_B die vertikale Komponente von $\delta\mathbf{r}_B$ ist.

d) Diskutieren Sie, wie sich eine Änderung der Stablängen oder der Lagerbedingungen auf die Form der virtuellen Arbeitsgleichung auswirkt. Welche Rolle spielen dabei die Größen N_{AB}, N_{BC}, N_{CA}?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Prinzip der virtuellen Kraftgrößen

a) Lösung zum Prinzip der virtuellen Kräfte

Für eine statische Struktur mit externen Kräften $\mathbf{F}_i$ an den Knotenpunkten gilt, dass die virtuelle Arbeit der externen Kräfte mit jeder zulässigen virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{r}_i$ gleich Null ist. In kompakten Begriffen kann dies geschrieben werden als

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \;=\; 0$$

für alle zulässigen $\delta\mathbf{r}_i$. In kompakter Form lässt sich dies auch als transponierte Matrixformulierung darstellen:

$$\mathbf{F}^T \, \delta\mathbf{r} \;=\; \mathbf{0},$$

wobei $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n]^T$ der Vektor der externen Knotenkräfte ist und $\delta\mathbf{r} = [\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n]^T$ der Vektor der zulässigen virtuellen Verschiebungen.

Anmerkung: Diese Gleichung beschreibt die Grundidee des Arbeitsprinzips der Mechanik in der statischen Krise: Für jedes reale (statisches) System müssen die virtuellen Arbeiten der äußeren Kräfte unter zulässigen virtuellen Verschiebungen Null sein.

b) Lösung zum Prinzip der virtuellen Weggrößen (Arbeitsprinzip der virtuellen Kräfte)

Im Fachwerk lässt sich das Prinzip der virtuellen Kräfte auch auf die Stäbe wenden, indem man die virtuellen Längenänderungen δl_k der Stäbe $k = 1, \ldots, m$ betrachtet. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{m} N_k \, \delta l_k \;=\; 0,$$

wobei N_k der axiale Zug-/Druckkraft des Stabes k ist und δl_k die Änderung der Länge des Stabes aufgrund der virtuellen Verschiebung der Knoten darstellt.

Zur Bestimmung von δl_k verwendet man die axiale Längendifferenz als Projektion der relativen Verschiebung der Stabenden auf die Stabanstiegsrichtung:

$$\delta l_k \;=\; \mathbf{e}_k \cdot (\delta\mathbf{r}_j - \delta\mathbf{r}_i), \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_k \;=\; \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{l_k},$$

wobei i und j die Endknoten des Stabes k bezeichnen und $l_k = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$ die Länge des Stabes ist.

Damit wird die virtuelle Arbeitsgleichung zu einer globalen Gleichung in den nodalen virtuellen Verschiebungen, die die statische Balance in einer starren Struktur wiedergibt.

c) Dreiecksstruktur: zulässige virtuelle Verschiebung mit festliegenden Lagerpunkten

Gegeben: Dreiecksstruktur mit den Stäben AB, BC, CA; A und C sind starr gelagerte Lagerpunkte, B ist frei. Die zulässige virtuelle Verschiebung wird durch eine kleine horizontale Verschiebung von Knoten B beschrieben, d. h.

$$\delta\mathbf{r}_B = (\delta x_B, \, 0), \qquad \delta\mathbf{r}_A = \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{r}_C = \mathbf{0}.$$

Berechnung der virtuellen Längenänderungen (mit der allgemeinen Form $\delta l_k = \mathbf{e}_k \cdot (\delta\mathbf{r}_j - \delta\mathbf{r}_i)$):

- Stab AB (Enden A und B): $\delta l_{AB} = \mathbf{e}_{AB} \cdot (\delta\mathbf{r}_B - \delta\mathbf{r}_A) = \mathbf{e}_{AB} \cdot (\delta x_B, 0) = e_{AB,x} \, \delta x_B$.

- Stab BC (Enden B und C): $\delta l_{BC} = \mathbf{e}_{BC} \cdot (\delta \mathbf{r}_C - \delta \mathbf{r}_B) = \mathbf{e}_{BC} \cdot (0,\ 0) - \mathbf{e}_{BC} \cdot (\delta x_B, 0) = -\, e_{BC,x}\, \delta x_B$.

- Stab CA: $\delta l_{CA} = \mathbf{e}_{CA} \cdot (\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_C) = 0$, da $\delta \mathbf{r}_A = \delta \mathbf{r}_C = \mathbf{0}$ gilt (die Endpunkte A und C bleiben fest).

Nun die virtuelle Arbeitsgleichung (mit der externen Kraft P senkrecht nach unten auf B):

$$P\, \delta y_B \;+\; N_{AB}\, \delta l_{AB} \;+\; N_{BC}\, \delta l_{BC} \;+\; N_{CA}\, \delta l_{CA} \;=\; 0.$$

Aus der gewählten Verschiebung ist $\delta y_B = 0$ und $\delta l_{CA} = 0$. Somit erhält man

$$0 \;=\; N_{AB}\, e_{AB,x}\, \delta x_B \;-\; N_{BC}\, e_{BC,x}\, \delta x_B \quad \Rightarrow \quad N_{AB}\, e_{AB,x} \;=\; N_{BC}\, e_{BC,x},$$

bzw. für nicht verschwindendes δx_B,

$$N_{AB}\, e_{AB,x} \;-\; N_{BC}\, e_{BC,x} \;=\; 0.$$

Interpretation: Für eine horizontale Verschiebung von B müssen die horizontalen Anteile der Axialkräfte in den Stäben AB und BC im Gleichgewicht stehen. Das Dreieck bleibt dabei in einer sensiblen Geometrie verankert, während CA keine Längenänderung annimmt, da A und C unverändert bleiben.

Weiterhin lässt sich die virtuelle Arbeitsgleichung bei allgemeinerem $\delta r_B = (\delta x_B, \delta y_B)$ als

$$P\, \delta y_B \;+\; (N_{AB}\, \mathbf{e}_{AB} - N_{BC}\, \mathbf{e}_{BC}) \cdot \delta \mathbf{r}_B \;=\; 0$$

schreiben, falls $\delta \mathbf{r}_A = \delta \mathbf{r}_C = \mathbf{0}$ gilt. In der speziellen Horizontalverschiebung ($\delta y_B = 0$) reduziert sich dies auf die obige Bedingung der Horizontalkomponenten.

d) Diskutieren Sie, wie sich eine Änderung der Stablängen oder der Lagerbedingungen auf die Form der virtuellen Arbeitsgleichung auswirkt. Welche Rolle spielen dabei die Größen N_{AB}, N_{BC}, N_{CA}?

- Geometrieabhängigkeit der Längenänderungen: $\delta l_k = \mathbf{e}_k \cdot (\delta \mathbf{r}_j - \delta \mathbf{r}_i)$ hängt unmittelbar von den Richtungsvektoren $\mathbf{e}_k$ ab. Eine Änderung der Stablängen verändert also die Richtungen $\mathbf{e}_k$ und damit die Koeffizienten der virtuellen Verschiebungen.

- Abhängigkeit der internen Kräfte: Die axialen Kräfte N_k hängen von der aktuellen Geometrie und den äußeren Lasten ab. Änderungen der Lagerbedingungen (z. B. bewegliche Lager, zusätzliche Lager) ändern die zulässigen virtuellen Verschiebungen und damit die Form der Gleichung sowie die Verteilung von N_k.

- Gesamtwirkung: Die allgemeine Form der virtuellen Arbeitsgleichung

$$P\, \delta y + \sum_{k=AB,BC,CA} N_k\, \delta l_k = 0$$

bleibt bestehen, aber die Ausdrücke für δl_k sowie die Werte von N_k ändern sich mit der Geometrie und den Randbedingungen. Dies beeinflusst direkt die Balance der Arbeit und damit die resultierenden Gleichgewichtsbeziehungen.

Lösung zu Aufgabe 2: Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte an einem einfachen Fachwerk

a) Lösung zur zulässigen virtuellen Verschiebung des Knotens B

Eine zulässige virtuelle Verschiebung ist eine horizontale Verschiebung des Knotens B, während die Lagerpunkte A und C fest bleiben (Lagerlinien). Es gilt daher

$$\delta\mathbf{r}_B = (\delta x_B,\ 0), \qquad \delta\mathbf{r}_A = \mathbf{0}, \qquad \delta\mathbf{r}_C = \mathbf{0}.$$

Damit können alle Längenänderungen der Stäbe durch die Verschiebung von B bestimmt werden.

b) Virtuelle Längenänderungen der Stäbe in Abhängigkeit von $\delta\mathbf{r}_B$

Allgemein gilt (mit $\delta\mathbf{r}_A = \delta\mathbf{r}_C = \mathbf{0}$)

$$\delta l_{AB} = \mathbf{e}_{AB} \cdot (\delta\mathbf{r}_B - \delta\mathbf{r}_A) = \mathbf{e}_{AB} \cdot \delta\mathbf{r}_B,$$

$$\delta l_{BC} = \mathbf{e}_{BC} \cdot (\delta\mathbf{r}_C - \delta\mathbf{r}_B) = -\,\mathbf{e}_{BC} \cdot \delta\mathbf{r}_B,$$

$$\delta l_{CA} = \mathbf{e}_{CA} \cdot (\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_C) = 0.$$

Hierbei ist $\mathbf{e}_{AB} = \dfrac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{l_{AB}}$, $\mathbf{e}_{BC} = \dfrac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B}{l_{BC}}$, $\mathbf{e}_{CA} = \dfrac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C}{l_{CA}}$.

Im Spezialfall einer rein horizontalen Verschiebung ($\delta\mathbf{r}_B = (\delta x_B, 0)$) gilt somit

$$\delta l_{AB} = e_{AB,x}\,\delta x_B, \qquad \delta l_{BC} = -\,e_{BC,x}\,\delta x_B, \qquad \delta l_{CA} = 0.$$

c) Virtuelle Arbeitsgleichung gemäß dem Prinzip der virtuellen Kräfte

Mit der äußeren vertikalen Einwirkung P am Knoten B und der axialen Kräfte N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} in den Stäben gilt

$$P\,\delta y_B \;+\; N_{AB}\,\delta l_{AB} \;+\; N_{BC}\,\delta l_{BC} \;+\; N_{CA}\,\delta l_{CA} \;=\; 0.$$

Setzen wir die oben ermittelten δl_k ein (und verwenden die Annahme $\delta y_B = 0$ für reine horizontale Verschiebung):

$$0 \;=\; N_{AB}\,e_{AB,x}\,\delta x_B \;-\; N_{BC}\,e_{BC,x}\,\delta x_B.$$

Daraus folgt, dass für ein kleines $\delta x_B \neq 0$

$$N_{AB}\,e_{AB,x} \;=\; N_{BC}\,e_{BC,x}.$$

Zusammengefasst: Die horizontale Komponente der Axialkräfte in AB und BC muss gleich gewichtet durch die jeweiligen Stabrichtungen sein, damit die horizontale virtuelle Arbeit verschwinden kann. (Falls zusätzlich eine vertikale Verschiebung δy_B zugelassen wäre, würde der Term $P\,\delta y_B$ zusammen mit den vertikalen Komponenten der Stabkräfte dazu beitragen, die Gleichgewichtsbeziehung zu liefern.)

d) Diskussion: Änderung von Stablängen oder Lagerbedingungen

- Geometrieabhängige Änderungen: Wird die Geometrie durch veränderte Stablängen oder eine andere Lagergeometrie modifiziert, ändern sich die Richtungsvektoren $\mathbf{e}_{AB}, \mathbf{e}_{BC}, \mathbf{e}_{CA}$. Da $\delta l_k = \mathbf{e}_k \cdot (\delta\mathbf{r}_j - \delta\mathbf{r}_i)$, ändern sich die Koeffizienten der virtuellen Verschiebungen unmittelbar und somit auch die Form der virtuellen Arbeitsgleichung.

- Abhängigkeit der internen Kräfte: Die Werte von N_{AB}, N_{BC}, N_{CA} hängen vom Tragsystem, der Geometrie und den äußeren Lasten ab. Änderungen der Lagerbedingungen verändern oft die zulässigen virtuellen Verschiebungen und damit die ausgeprägte Verteilung der Stabkräfte. Die Arbeit der Stäbe $\sum N_k \delta l_k$ wird dadurch in anderer Weise gewichtet.

- Allgemeine Folge: Die Gleichung

$$P\,\delta y_B + \sum_{k\in\{AB,BC,CA\}} N_k\,\delta l_k = 0$$

bleibt formell gültig, aber die konkreten Ausdrücke für δl_k und die Werte von N_k verändern sich entsprechend der Geometrie und Randbedingungen. Das macht die virtuelle Arbeit zu einem mächtigen Instrument, um Geometrie-abhängige Gleichgewichte zu analysieren, insbesondere bei statisch bestimmten Fachwerken.