

Übungsaufgabe

Nebenläufigkeit: Prozesse, Threads, Scheduling –
Konzepte, Algorithmen und Implementierung in
C

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Systemprogrammierung
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Systemprogrammierung

Aufgabe 1: Grundlagen der komplexen Zahlen

Betrachten Sie komplexe Zahlen der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aufgaben befassen sich mit Polarform, Potenzen, Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$ sowie mit grundlegenden Identitäten.

a) Schreibe $z = -3 + 4i$ in Polarform $z = r e^{i\theta}$. Gib r und θ im Intervall $(-\pi, \pi]$ an und fasse z auch als $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ bzw. $z = r e^{i\theta}$ zusammen.

b) Berechne z^2 und z^3 in der Form $a + bi$ und verifiziere die Ergebnisse durch die Polarform $z^n = r^n e^{in\theta}$.

c) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$. Gib sie sowohl in der Form $z_k = e^{i\pi k/2}$ mit $k = 0, 1, 2, 3$ als auch in der kartesischen Form an.

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = i$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = -i$$

d) Zeige die Identitäten

$$z \bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2 \Re(z),$$

und berechne beide Größen für $z = -3 + 4i$.

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen als Vektor- und Abbildungen

Betrachte komplexe Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und als Matrixoperatoren. Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass die Multiplikation mit z als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wirkt durch

$$(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$

Gib die entsprechende Matrixdarstellung an und formuliere sie als

$$M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die Matrix M_{1+i} für $z = 1 + i$ und interpretiere sie geometrisch.

c) Zeige, dass für $|z| = 1$ die Matrix M_z orthogonal ist ($M_z^T M_z = I$) und somit eine reine Rotation durch den Winkel $\theta = \arg z$ repräsentiert. Außerdem gilt $\cos \theta = a$ und $\sin \theta = b$ für $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Grundlagen der komplexen Zahlen

a) Lösung:

$$z = -3 + 4i \quad \Rightarrow \quad r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Der Winkel θ liegt in $(-\pi, \pi]$ und ergibt sich aus

$$\theta = \operatorname{atan2}(4, -3) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2.214297435 \text{ rad.}$$

Daraus

$$z = r e^{i\theta} = 5 e^{i\theta} = 5(\cos \theta + i \sin \theta).$$

b) Lösung:

$$z^2 = (-3 + 4i)^2 = (-3)^2 - 4^2 + 2(-3)(4)i = 9 - 16 - 24i = -7 - 24i,$$

$$z^3 = z^2 z = (-7 - 24i)(-3 + 4i) = 117 + 44i.$$

Verifikation via Polarform: Da $r = 5$ und θ wie oben, gilt

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} = 25(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)).$$

Mit $\cos(2\theta) = -7/25$, $\sin(2\theta) = -24/25$ erhält man $-7 - 24i$.

Similarly,

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 125(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)),$$

mit $\cos(3\theta) = 117/125$, $\sin(3\theta) = 44/125$, woraus $z^3 = 117 + 44i$.

c) Lösung:

$$z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_k = e^{i\pi k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Damit

$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i\pi/2} = i, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

d) Lösung: Es gilt

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2\Re(z).$$

Für $z = -3 + 4i$ gilt $\bar{z} = -3 - 4i$. Also

$$z\bar{z} = (-3 + 4i)(-3 - 4i) = 9 + 16 = 25 = |z|^2, \quad z + \bar{z} = -3 + 4i - 3 - 4i = -6 = 2\Re(z).$$

Lösung zu Aufgabe 2: Komplexe Zahlen als Vektor- und Abbildungen

a) Lösung: Sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $w = x + iy$. Dann

$$zw = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Daraus folgt die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$(x, y) \mapsto (ax - by, by + ax) = (ax - by, bx + ay).$$

Die Matrixdarstellung dieser Abbildung ist

$$M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

b) Lösung: Für $z = 1 + i$ ($a = 1, b = 1$) gilt

$$M_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrische Interpretation: Die Abbildung ist eine Skalierung um den Betrag $r = |z| = \sqrt{2}$ kombiniert mit einer Drehung um $\theta = \arg z = \pi/4$. Der Zusammenhang ergibt sich durch

$$M_z = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

Für $z = 1 + i$ erhält man

$$M_{1+i} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Lösung: Sei $|z| = 1$. Dann $M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Orthogonalität:

$$M_z^T M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist M_z orthogonal, d.h. eine reine Rotation durch den Winkel $\theta = \arg z$.

Zusammenhang mit der Drehmatrix: Für $z = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$ gilt $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$ und

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

also eine Rotation um θ im $\mathbb{R}^2$.