# Übungsaufgabe

## Dynamische Systeme: Fixed Points, Stabilität, Linearisierung, lokale Stabilität

**Universität:** Technische Universität Berlin
**Kurs/Modul:** Analysis III für Ingenieure
**Erstellungsdatum:** September 6, 2025

# Aufgabe 1: Fixed Points und lokale Stabilität eines diskreten dynamischen Systems

Betrachten Sie das diskrete Abbild $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{2} - y,\ \frac{y}{2} + x^2\right).$$

Eine Gleichung $(x^*, y^*)$ heißt Fixpunkt, wenn $F(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$.

a) Bestimme alle Fixpunkte des Abbildes $F$.

b) Bestimme die Jacobi-Matrix von $F$,

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

und berechne $J_F(x^*, y^*)$ an jedem gefundenen Fixpunkt $(x^*, y^*)$. Leite daraus die Eigenwerte von $J_F(x^*, y^*)$ ab.

c) Beurteile anhand der Beträge der Eigenwerte die lokale Stabilität der Fixpunkte. Diskutiere, ob die Fixpunkte hyperbolisch sind und welche Art von Stabilität (attraktiver Fixpunkt, Sattelpunkt, etc.) vorliegen könnte.

# Aufgabe 2: Linearisierung eines kontinuierlichen Systems und lokale Stabilität

Betrachte das autonome System in $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y) = -x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) = -y - x^2 + 1.$$

a) Bestimme alle Gleichgewichtspunkte $(x^*, y^*)$ des Systems.

b) Bestimme die Jacobi-Matrix

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & -1 \end{pmatrix},$$

und werte sie in die gefundenen Gleichgewichtspunkte aus. Leite daraus die Eigenwerte von $J(x^*, y^*)$ ab.

c) Diskutiere die lokale Stabilität jedes Gleichgewichtspunkts anhand der Vorzeichen der Eigenwerte. Gib an, ob die Gleichgewichte hyperbolisch sind und welche Typen auftreten könnten.

# Aufgabe 3: Nichtlineare Kopplung und weitere Stabilitätsanalyse

Betrachte das System

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + x^2, \qquad \frac{dy}{dt} = -y + x^2.$$

a) Bestimme alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Schreibe die Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-x + y + x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-x + y + x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-y + x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-y + x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2x & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

und werte sie an jedem Gleichgewichtspunkt aus. Leite daraus die lokalen Stabilitätsverhältnisse ab, indem du die Eigenwerte von $J(x^*, y^*)$ betrachtest.

c) Gib eine kurze Diskussion zur Stabilität der gefundenen Gleichgewichte anhand der Linearisation. Welche Punkte sind stabil, welche instabil (Sattel- oder Spiraltypen etc.)?

# Lösungen

# Lösung zu Aufgabe 1

### a) Fixpunkte des Abbildes $F$.

Wir lösen das Gleichungssystem

$$F(x,y) = \left(\tfrac{x}{2} - y,\ \tfrac{y}{2} + x^2\right) = (x,y).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} - y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x}{2}, \\ y &= \frac{y}{2} + x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x^2. \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$-\frac{x}{2} = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x(4x+1) = 0.$$

Daraus ergeben sich die festen Punkte

$$(x^*, y^*) = (0,0) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$

### b) Jacobi-Matrix von $F$ und Auswertung an den Fixpunkten.

Allgemein

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2x & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

An $(0,0)$:

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da $J_F(0,0)$ uppertraingular ist, liegt die Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ vor (d.h. $\operatorname{spec}(J_F(0,0)) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$).
An $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$:

$$J_F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$\det\left(J_F - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

Also

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Damit ist

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.207, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.207.$$

### c) Lokale Stabilität.

Für diskrete Dynamik gilt: ein Fixpunkt ist exakt stabil (lokal asymptotisch stabil), sofern alle Eigenwerte $|\lambda_i| < 1$ haben.

- Am $(0,0)$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit $|\lambda_i| < 1$. Darüber hinaus ist der Fixpunkt hyperbolisch (alle Eigenwerte liegen außerhalb des Einheitskreises). Folglich ist $(0,0)$ ein lokales Attraktor (Sink).

- Am $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ haben die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 1$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ mit $|\lambda_2| < 1$. Da einer der Eigenwerte eine Betragsgröße größer als 1 hat, ist der Fixpunkt ein Sattelpunkt (hyperbolisch, mit einer stabilen und einer instabilen Mannigfaltigkeit).

—

# Lösung zu Aufgabe 2

### a) Gleichgewichtspunkte des Systems.

Gegeben ist

$$\frac{dx}{dt} = -x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = -y - x^2 + 1.$$

Gleichgewichte erfüllen $-x + y = 0$ und $-y - x^2 + 1 = 0$. Aus $y = x$ folgt aus der zweiten Gleichung

$$-x - x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$x^* = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad y^* = x^*.$$

Also zwei Gleichgewichtspunkte:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

### b) Jacobi-Matrix und Auswertung.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & -1 \end{pmatrix}.$$

- An $(x^*, y^*) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$: Hier ist $-2x^* = -2\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$. Also

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-\sqrt{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte erfüllen

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + \sqrt{5} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda = -1 \pm i\sqrt{\sqrt{5} - 1},$$

also komplexe konjugierte Eigenwerte mit Realteil $-1$. Damit handelt es sich um einen stabilen Schwerpunkt (stabiler Fokus) – die Fixpunkteigenschaften sind durch Hartman-Grobman stabil.

- An $(x^*, y^*) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$: Hier ist $-2x^* = -2\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$. Somit

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+\sqrt{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte lösen
$$\det(J-\lambda I)=\lambda^2+2\lambda-\sqrt{5}=0$$
und
$$\lambda=-1\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}.$$
Hier liegt ein positiver und ein negativer Wert vor (Sattelpunkt), also kein asymptotischer Stabilitätspotential.

**c) Diskussion.**

Durch Linearisation (Hartman-Grobman) gilt nahe jedem hyperbolischen Gleichgewichtspunkt die lokale Dynamik der linearen Approximation. Folglich:

- am $(0,0)$ ist der Fixpunkt asymptotisch stabil (stabiler Fokus), rotiert während die Trajektorien gegen ihn laufen (negative Realteil der Eigenwerte).

- am $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ ebenfalls asymptotisch stabil, aber mit Rotation (stabiler Fokus, komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil).

- am $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ ist ein Sattelpunkt (eine stabile und eine instabile Mannigfaltigkeit).

—

# Lösung zu Aufgabe 3

**a) Gleichgewichtspunkte des Systems.**

Gleichgewichte erfüllen
$$-x+y+x^2=0,\qquad -y+x^2=0.$$
Aus der zweiten Gleichung folgt $y=x^2$. Einsetzen in die erste führt zu
$$-x+x^2+x^2=0\quad\Rightarrow\quad x(-1+2x)=0.$$
Daraus ergeben sich
$$x=0\quad\text{oder}\quad x=\frac{1}{2},$$
und entsprechend
$$(y,x)=(0,0)\quad\text{bzw.}\quad(y,x)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$$
Also zwei Gleichgewichtspunkte:
$$(0,0),\qquad\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

**b) Jacobi-Matrix und Auswertung.**

Gegeben
$$J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(-x+y+x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-x+y+x^2)\\ \frac{\partial}{\partial x}(-y+x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-y+x^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2x & 1\\ 2x & -1\end{pmatrix}.$$

- Am $(0,0)$:
$$J(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Characteristische Gleichung:

$$\det(J - \lambda I) = (-1 - \lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Beide Eigenwerte negativ; der Fixpunkt ist asymptotisch stabil. Da die Matrix nicht diagonalisiert ist (Doppelwurzel mit einer einzigen Eigenrichtung), spricht man von einem stabilen,unstabilen Typ eines impliziten Plans (ein starker starkeriek) – allgemein: asymptotisch stabiler Fixpunkt (in der linearen Approximation ein stabiler defekter Knoten).

- Am $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$:

$$J\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte lösen

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Damit

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die beiden Eigenwerte haben entgegengesetzte Vorzeichen (einer positiv, einer negativ), also ist der Fixpunkt ein Sattelpunkt; Hyperbolizität liegt vor.

**c) Diskussion.**

Aufgrund der Linearisation sind folgende Aussagen gültig:

- $(0, 0)$ ist asymptotisch stabil (negativer Realteil der Eigenwerte, hier beide gleich $-1$; Defekt der Matrix erklärt den Jordan-Typen). Die Trajektorien nähren sich dem Gleichgewicht an.

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ist ein hyperbolischer Sattel (ein destruktiver Type mit einer stabilen und einer instabilen Mannigfaltigkeit).

Die Aussagen beruhen auf der Tatsache, dass alle Gleichgewichtspunkte hyperbolisch sind (keine Eigenwerte mit Realteil 0); damit gilt die Hartman-Grobman-Theorie in lokaler Form.