Übungsaufgabe

Komplexe Dynamik: Iteration, Julia- und Fatou-Sätze, Stabilitätskriterien

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Iteration, Julia- und Fatou-Sätze für $f(z) = z^2$

Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2.$ Untersuchen Sie die grundlegenden Eigenschaften der Iteration, die Struktur der Julia- und Fatou-Sätze sowie Stabilitätskriterien der Fixpunkte und Perioden. Beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben.

a) Bestimme die festen Punkte von f (Löse $z = f(z)$) und gib eine Beurteilung der Stabilität anhand des Multipliers $f'(z) = 2z$ an.

b) Bestimme alle Punkte der Periode-2 (Löse $f^2(z) = z$ mit $z \neq f(z)$) und gib an, welcher Zyklus entsteht. Berechne den zugehörigen Multiplier $(f^2)'(z) = f'(z)\, f'(f(z))$ und beurteile die Stabilität des Zyklus.

c) Beschreibe die Julia-Menge $J(f)$ und die Fatou-Menge $F(f)$ von f. Skizziere, welche Punkte in $F(f)$ liegen und wie sich die dynamischen Orbits verhalten.

Aufgabe 2: Die Familie $f_c(z) = z^2 + c$ – Parametertypen und Stabilität

Betrachten Sie die Familienabbildung $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Parameter $c \in \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$.

a) Bestimme die festen Punkte von f_c durch Lösen $z = f_c(z)$ und schreibe die Lösungen als Funktion von c bzw. durch die Diskriminante der Gleichung $z^2 - z + c = 0$.

b) Bestimme die Multiplikatoren an den festen Punkten, $\lambda_i = f_c'(z_i) = 2z_i$, und klassifiziere damit die Stabilität der jeweiligen Fixpunkte (attraktiv, repulsiv, neutral).

c) Diskutiere in allgemeiner Form, wie sich die Stabilität der festen Punkte mit dem Parameter c ändert. Welche Aussagen lassen sich über die Bildung von Julia- und Fatou-Mengen in Abhängigkeit von c treffen? (Bezeichne die gängigen Typen von Verhalten im Parameterraum, ohne konkrete numerische Beispiele zu lösen.)

Aufgabe 3: Stabilitätskriterien in der komplexen Dynamik und Beispiele

Betrachten Sie allgemeine rationale Abbildungen $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sowie die Rolle von Fixpunkten und Perioden für die Stabilität.

a) Formuliere das zentrale Stabilitätskriterium für Fixpunkte einer holomorphen Abbildung in der Form eines Multipliers $\lambda = f'(z^*)$ und erkläre, wie dessen Betrag die Zugehörigkeit zum Fatou- bzw. Julia-Satz bestimmt.

b) Wenden Sie das Stabilitätskriterium auf das Beispiel $f(z) = z^2$ an und diskutieren Sie die Stabilität der festen Punkte $z = 0$ und $z = 1$ sowie die Stabilität eines typischen Zyklus der Ordnung 2.

c) (Fortgeschritten) Diskutieren Sie, warum die Existenz eines attractiven Fixed Points in der Fatou-Menge liegt und wie die Julia-Menge durch lokale Stabilitätseigenschaften bestimmt wird. Geben Sie eine kurze, konzeptionelle Begründung, ohne konkrete Berechnungen durchzuführen.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Iteration, Julia- und Fatou-Sätze für $f(z) = z^2$

a) Lösung: - Fixpunkte von f erhalten wir aus $z = f(z)$: $z = z^2 \Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z \in \{0, 1\}$. - Die Ableitung ist $f'(z) = 2z$. Daraus ergeben sich:

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2.$$

Folglich ist $z = 0$ ein attraktiver Fixpunkt (Multiplikator $|f'(0)| = 0 < 1$) und $z = 1$ ein multiplikatorisch abstoßender Fixpunkt (Multiplikator $|f'(1)| = 2 > 1$).

b) Lösung: - Betrachte $f^2(z) = f(f(z)) = \left(z^2\right)^2 = z^4$. Die Gleichung $f^2(z) = z$ lautet daher $z^4 = z$, d.h.

$$z(z^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z \in \{0, 1, \omega, \omega^2\},$$

wobei $\omega = e^{2\pi i/3}$ ein primitiver Dreierwurzel der Eins ist. - Die Punkte mit $z \in \{0, 1\}$ sind Fixpunkte; die Periode-2-Punkte sind also ω und ω^2, die den 2-Zyklus bilden $\{\,\omega, \omega^2\,\}$. - Der Multiplier zu einem 2-Zyklus ist

$$(f^2)'(z) = f'(z)\, f'(f(z)) = (2z) \cdot (2f(z)) = 4z\, f(z) = 4z\,(z^2) = 4z^3.$$

Für alle z mit $z^3 = 1$ gilt $(f^2)'(z) = 4$ und damit $|(f^2)'(z)| = 4 > 1$. Der Zyklus ist also repulsiv.

c) Lösung: - Die Julia-Menge $J(f)$ von $f(z) = z^2$ ist die Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. - Die Fatou-Menge $F(f)$ besteht aus den beiden Basen der Attraktoren: $\{|z| < 1\}$ (Basin der Anziehung zu 0) und $\{|z| > 1\}$ (Basin der Flucht gegen ∞). - Begründung (skizzenhaft): Für $|z| < 1$ gilt $|f^n(z)| = |z|^{2^n} \to 0$; für $|z| > 1$ gilt $|f^n(z)| \to \infty$. Auf dem Einheitskreis erfolgt eine Verdopplung des Winkels θ unter f, was chaotische/dichte Orbits erzeugt; dies charakterisiert die Julia-Menge.

Lösung zu Aufgabe 2: Die Familie $f_c(z) = z^2 + c$ – Parametertypen und Stabilität

a) Lösung: - Fixpunkte von f_c erfüllen $z = f_c(z)$ bzw. $z = z^2 + c$. Umgeschrieben:

$$z^2 - z + c = 0.$$

Die Lösungen lauten

$$z_\pm(c) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

wobei $\Delta = 1 - 4c$ die Diskriminante ist und $\sqrt{\Delta}$ eine beliebige Zweigwahl sein kann (komplexe Wurzeln möglich).

b) Lösung: - Die Multiplikatoren an den festen Punkten sind

$$\lambda_\pm = f_c'(z_\pm) = 2z_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}.$$

Die Stabilität der jeweiligen Fixpunkte folgt aus $|\lambda_\pm|$: - attraktiv, falls $|\lambda_\pm| < 1$, - repulsiv, falls $|\lambda_\pm| > 1$, - neutral, falls $|\lambda_\pm| = 1$. - Beispiel: $c = 0$ liefert $\Delta = 1$, $z_+ = 1$, $z_- = 0$ und $\lambda_+ = 2$, $\lambda_- = 0$; daher ist $z_- = 0$ attraktiv (basin um 0) und $z_+ = 1$ repulsiv. - Allgemein lässt sich die Bedingung $|\lambda_\pm| < 1$ direkt schreiben als $|1 \pm \sqrt{1-4c}| < 1$. In parametrischen Bereichen des c-Planes (insbesondere innerhalb des Mandelbrot-Menge M) existieren Parameter, für die ein fixer Punkt attraktiv ist (Hauptcardioid) und Parameter, für die beide Fixpunkte repulsiv oder neutral sind (Rand von M bzw. außerhalb von M). Innerhalb der Hauptcardioid existiert typischerweise genau ein attraktiver Fixpunkt; außerhalb können attractive Perioden höheren Ordnung auftreten; außerhalb von M existieren oft keine attractiven Zyklen.

c) Lösung: - Allgemeinzeitliche Aussagen über Stabilität im Parameterraum: - Wenn c innerhalb des Mandelbrot-Menge M liegt, besitzt die Familie f_c mindestens einen attraktiven Zyklus; die Julia-Menge $J(f_c)$ ist verbunden und der Fatou-Mengen-Raum besteht aus den Basen der Attraktoren. - Liegt c außerhalb von M, gibt es kein attractives Zyklusverhalten für den kritischen Punkt 0; die Julia-Menge ist oft Cantor-ähnlich und der Fatou-Satz besteht lediglich aus dem Basins des Unendlichen. - Innerhalb von M teilt sich der Parameterraum weiter in Regionen mit attractiven Zyklen unterschiedlicher Ordnung (Hauptcardioid für Ordnung 1, Bulges für Ordnung 2, usw.). Am Rand von M treten neutrale Zyklen auf (z. B. durch Paraboik-Parameter).

Lösung zu Aufgabe 3: Stabilitätskriterien in der komplexen Dynamik und Beispiele

a) Lösung: - Zentrales Stabilitätskriterium: Sei f holomorph in einer Umgebung von einem Fixpunkt z^* mit Multiplier $\lambda = f'(z^*)$. Dann gilt: - falls $|\lambda| < 1$, ist z^* attraktiv, - falls $|\lambda| > 1$, ist z^* repulsiv, - falls $|\lambda| = 1$, ist z^* neutral (weitere Feinheiten wie Parabolic- oder Siegel-Punkte erfordern eine weitere Analyse). - In der Fatou-Menge existieren lokale Stabilitäten um attraktive Fixpunkte; die Julia-Menge ist der Rand dieser stabilen Gebiete und enthält typischerweise alle repulsiven Periodenpunkte.

b) Lösung: - Betrachte $f(z) = z^2$. - Fixpunkte: $z = 0$ und $z = 1$ mit Multiplikatoren

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2.$$

Folgerung: $z = 0$ ist attraktiv ($|0| < 1$); $z = 1$ ist repulsiv ($|2| > 1$). - Eine typische Periode-2-Beobachtung: $\{\omega, \omega^2\}$ mit $\omega = e^{2\pi i/3}$ und $\omega^2 = e^{4\pi i/3}$. Die zugehörigen Punkte erfüllen $f^2(z) = z$ und $f(z) \neq z$. Der 2-Zyklus ist durch den Multiplikator

$$(f^2)'(z) = f'(z)\, f'(f(z)) = 4z^3$$

gegeben. Für z mit $z^3 = 1$ gilt $(f^2)'(z) = 4$. Damit $|(f^2)'(z)| = 4 > 1$ und der Zyklus ist repulsiv. - In Summe: Es existiert genau eine attraktive Fixedpunkte (0), alle anderen periodischen Punkte (einschließlich des 2-Zyklus) sind repulsiv. Die Julia-Menge ist die Einheitskreis $|z| = 1$; die Fatou-Menge besteht aus zwei Komponenten: $\{|z| < 1\}$ (Basin von 0) und $\{|z| > 1\}$ (Basin von ∞).

c) Lösung (Fortgeschritten – konzeptionell): - Die Existenz eines attraktiven Fixedpoints liegt in der Fatou-Menge; dort konvergieren Orbits lokales Verhalten in einer Umgebung des Fixedpoints. - Die Julia-Menge ergibt sich als Rand der Fatou-Komponenten und trägt das chaotische, empfindliche Verhalten der Gesamtdynamik. - Allgemein gilt: Je stabiler (je größer das Gebiet der Attraction um einen Fixedpoint), desto deutlicher ist der Einfluss der lokalen Stabilität auf die globale Dynamik; die Julia-Menge wird durch die lokalen Stabilitätseigenschaften bestimmt und stellt die Grenze zu den stabilen Fatou-Komponenten dar.