Probeklausur

Analysis III für Ingenieure

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie für $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ mit $z = x + iy$ und f holomorph, dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -\, v_x$$

erfüllt sein müssen. Betrachten Sie hierfür $f(z) = z^2$ und geben Sie eine Darstellung von f in Form von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(z) = z^2$ um $z_0 = 0$ bis Ordnung 3 und geben Sie die Form der Restglieder an.

(c) Geben Sie eine harmonische Funktion $u(x, y) = x^2 - y^2$ vor. Bestimmen Sie eineKonjugierte $v(x, y)$, so dass $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ holomorph ist.

(d) Geben Sie die Taylorentwicklung der Ordnung 3 von e^z um $z = 0$ an und schreiben Sie die Restabschätzung in geeigneter Form nieder.

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie das Konturintegral

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$$

mit $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \,\}$ (Uhrzeigersinn positiv) Orientierung.

(b) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$$

in den isolierten Singularitäten $z = 0$ und $z = 1$.

(c) Verwenden Sie den Residuensatz, um das Konturintegral

$$\oint_C f(z)\,dz$$

zu berechnen, wobei $C = \{\, z : |z| = 2 \,\}$ wie in Teil (a).

(d) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

um $z = 0$, gültig in $0 < |z| < 1$.

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die eindimensionale, diskrete Dynamik

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = 1 - a\,x^2, \quad a = 1.5.$$

Bestimmen Sie die Fixed Points von φ und diskutieren Sie deren Stabilität durch Prüfung von $|\varphi'(x^*)|$.

(b) Analysieren Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenvektoren. Beschreiben Sie das asymptotische Verhalten der Lösungen.

(c) Untersuchen Sie das Nichtlinear-System

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x^2, \end{cases}$$

in der Umgebung des Fixed Points $(0, 0)$ durch Linearisierung. Bestimmen Sie die Stabilität des Fixed Points und skizzieren Sie das Verhalten der orbits in der Umgebung.

(d) Geben Sie ein kurzes Beispiel an, in dem die lineare Stabilitätsanalyse das Verhalten eines Nichtlinearsystems in der Nähe eines Fixed Points bestimmt.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$y'' + 4\,y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Geben Sie die Lösung eindeutig an.

(b) Gegeben ist das Eigenwertproblem

$$-u'' = \lambda u \quad \text{auf } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Bestimmen Sie die ersten drei Eigenwerte λ_n und die entsprechenden Eigenfunktionen u_n.

(c) Lösen Sie das inhomogene Randwertproblem

$$y'' - y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ auf $[0,1]$.

(d) Beschreiben Sie kurz das Prinzip von Sturm-Liouville-Problemen, insbesondere mit Blick auf Existenz, Eindeutigkeit der Lösungen und die Struktur der Eigenwerte.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1.

Lösung:

(a) Für f holomorph, müssen die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -\,v_x$$

erfüllt sein. Betrachten wir hierzu $f(z) = z^2$ mit $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Es gilt

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i,$$

also

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Die Ableitungen sind

$$u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = 2y, \quad v_y = 2x.$$

Folglich

$$u_x = v_y = 2x, \qquad u_y = -v_x = -2y,$$

also erfüllen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ (CR-Gleichungen).

(b) Die Taylorreihe von $f(z) = z^2$ um $z_0 = 0$ bis Ordnung 3 lautet

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots = 0 + 0 \cdot z + \frac{2}{2}z^2 + 0 \cdot z^3 = \; z^2.$$

Die Restgliedernform in Lagrangescher Form ist

$$R_3(z) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}z^4,$$

wobei $f^{(4)} \equiv 0$ ist; daher gilt $R_3(z) \equiv 0$.

(c) Sei $u(x, y) = x^2 - y^2$. Gesucht ist eine obere Konjugierte v mit $f(z) = u + iv$ holomorph. Aus CR-Gleichungen folgt

$$u_x = 2x = v_y \quad \Rightarrow \quad v_y = 2x \quad ;\Rightarrow \quad v(x, y) = 2xy + g(x).$$

Weiter

$$u_y = -2y = -v_x = -(2y + g'(x)) \;\Rightarrow\; g'(x) = 0.$$

Demnach wähle man $g(x) \equiv 0$ und

$$v(x, y) = 2xy.$$

Dann ist

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) = (x + iy)^2 = z^2,$$

also holomorph.

(d) Die Taylorentwicklung von e^z um $z = 0$ bis Ordnung 3 ist

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + R_3(z),$$

wobei

$$R_3(z) = \frac{e^\xi}{4!} z^4, \quad \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } z.$$

Eine Betragsschätzung ergibt

$$|R_3(z)| \leq \frac{e^{|\,z\,|}}{24} |z|^4.$$

Aufgabe 2.

Lösung:

(a) Es gilt $f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right)$. Die " isolierten Singularitäten" sind $z = i$ und $z = -i$ (beide in $|z| \leq 2$). Die Residuen sind

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \frac{i}{i + i} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z + i) f(z) = \frac{-i}{-i - i} = \frac{1}{2}.$$

Die Summe der Residuen innerhalb von $C : |z| = 2$ ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da die Orientierung in Aufgabe (a) negativ (Uhrzeigersinn positiv) ist, gilt

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1}\, dz = -2\pi i \cdot 1 = -2\pi i.$$

(b) Für $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$ sind einfache Pole bei $z = 0$ und $z = 1$. Es gilt

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 1}{z - 1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{1 + 1}{1} = 2.$$

(c) Zunächst summieren wir die Residuen innerhalb von $C : \ |z| = 2$. Die Summe ist $-1 + 2 = 1$. Mit der gleichen Orientierung wie in (a) folgt

$$\oint_C f(z)\, dz = -2\pi i \cdot 1 = -2\pi i.$$

(Bei der üblichen Gegenorientierung wäre das Vorzeichen positiv.)

(d) Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{1}{z(1 + z^2)}$$

um $z = 0$ gültig für $0 < |z| < 1$. Zunächst zerlegen wir

$$\frac{1}{z(1 + z^2)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{1 + z^2}.$$

Die zweite Summenentwicklung ergibt

$$\frac{z}{1+z^2} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1},$$

also

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots \quad \text{für } 0 < |z| < 1.$$

Aufgabe 3.

Lösung:

(a) Die Fixpunkte erfüllen

$$x = \varphi(x) = 1 - ax^2, \quad a = \ 1.5 \quad \Rightarrow \ ax^2 + x - 1 = 0.$$

Mit $a = \frac{3}{2}$ ergibt sich

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Numerisch:

$$x^*_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0.5486, \qquad x^*_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1.2153.$$

Die Stabilität wird durch $|\varphi'(x^*)|$ bestimmt, wobei

$$\varphi'(x) = -2ax, \qquad |\varphi'(x^*)| = 2a|x^*| = 3|x^*|.$$

Damit gilt

$$|\varphi'(x^*_1)| \approx 3 \cdot 0.5486 \approx 1.65 > 1, \qquad |\varphi'(x^*_2)| \approx 3 \cdot 1.2153 \approx 3.65 > 1.$$

Beiden Fixpunkten liegt somit eine Instabilität zugrunde; beide sind daher instabil (repellierend).

(b) Die Eigenwerte der linearen Gleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ergeben sich aus $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3.$$

Zugehörige Eigenvektoren:

$$\lambda = -1:\ (A+I)v = 0 \Rightarrow v = (1,-1)^T, \qquad \lambda = -3:\ (A+3I)v = 0 \Rightarrow v = (1,-3)^T.$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Das Verhalten: Beide Trajektorienwege streben gegen Null, d.h. das System besitzt einen stabilen (aber nicht normierbaren) Knoten mit zwei negativ fallenden Eigenwerten.

(c) Nichtlineares System

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x^2, \end{cases}$$

in der Umgebung von $(0,0)$ durch Linearisierung:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dessen Eigenwerte 1 und 1 sind (doppelter Eigenwert, geometrische Multiplizität 1). Da der Realteil der Eigenwerte positiv ist, ist der Fixed Point $(0,0)$ instabil (nicht-heterotop). Das Verhalten der Orbits nahe dem Fixed Point ist durch die Darstellbarkeit

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad y(t) = c_1 e^t$$

(bis auf eine geeignete Wahl der Koordinaten) gekennzeichnet; die Trajektorien entfernen sich vom Ursprung.

(d) Kurzes Beispiel zur Bestätigung der linearen Stabilitätsanalyse Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = -x + h.o.t., \\ y' = -y + h.o.t., \end{cases}$$

im Ursprung. Die lineare Approximation besitzt die Matrix $\operatorname{diag}(-1,-1)$ mit negativen Eigenwerten, daher ist der Ursprung (lokal) asymptotisch stabil. Da die Nichtlineart-erme klein sind (hohe Ordnung), bleibt die Stabilität lokal erhalten; diese Beobachtung bestätigt die Vorhersage der linearen Stabilitätstheorie.

Aufgabe 4.

Lösung:

(a) Lösung des Randwertproblems

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Allg. Lösung: $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$. Aus $y(0) = 0$ folgt $A = 0$, also $y(t) = B\sin(2t)$. Weiter $y(\pi/2) = B\sin(\pi) = 0$ erfüllt sich für jedes $B \in \mathbb{R}$. Also existieren unendlich viele Lösungen:

$$y(t) = C\,\sin(2t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist die Nullfunktion $y \equiv 0$ eine Lösung (entspricht $C = 0$).

(b) Eigenwertproblem

$$-u'' = \lambda u \quad \text{auf } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die Normalformen liefern die Eigenwerte

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und zugehörige Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3.$$

Die ersten drei Werte: $\lambda_1 = \pi^2$, $\lambda_2 = 4\pi^2$, $\lambda_3 = 9\pi^2$, mit $u_1(x) = \sin(\pi x)$, $u_2(x) = \sin(2\pi x)$, $u_3(x) = \sin(3\pi x)$.

(c) Inhomogenes Randwertproblem

$$y'' - y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Lösungskonstruktion: Zunächst homogener Teil

$$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

eine spezielle Lösung des Inhomogenen: $y_p = \frac{t}{2} e^t$ erfüllt

$$y_p'' - y_p = e^t.$$

Gesamt

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} e^t.$$

Mit $y(0) = 0$ erhält man $C_2 = -C_1$. Die Bedingung $y(1) = 0$ liefert

$$C_1 e + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2} e = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{e}{2(e - e^{-1})} = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}, \quad C_2 = -C_1 = \frac{e^2}{2(e^2-1)}.$$

Damit

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} e^t, \qquad C_1 = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}, \quad C_2 = \frac{e^2}{2(e^2-1)}.$$

(d) Prinzip von Sturm-Liouville-Problemen - Existenz und Eindeutigkeit: Zu einem gegebenen Randwertproblem $-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x) y$ mit passenden Randbedingungen existieren unter üblicher Regularität von p, q, w sowohl reelle Eigenwerte λ_n als auch zugehörige Eigenfunktionen y_n. - Orthogonalität: Die Eigenfunktionen y_n bilden eine orthogonale Basis in dem passenden Gewicht $w(x)$ (im L^2_w Sinne). - Diskrete Spektrum: Die Eigenwerte λ_n sind reell, ohne Höchstwert, abzählbar und wachsen typischerweise wie n^2 (je nach Randbedingungen und Koeffizienten). - Lösungshilfe für Inhomog Problem: Für gegebene rechte Seite f lässt sich die Lösung als Reihe

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{\int_0^1 f(x) y_n(x) w(x)\, dx}{\lambda_n \int_0^1 y_n(x)^2 w(x)\, dx}$$

darstellen; insbesondere existiert und ist eindeutig, sofern λ kein Eigenwert ist.