Probeklausur

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Bearbeitungszeit:	180 Minuten
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

https://study.AllWeCanLearn.com

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1 + x)$ um $x = 0$ bis Ordnung 3 und geben Sie die Form der Fehlerschranke an.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \quad (x \to 0).$$

(c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Ordnung 4 von $f(x) = e^x$ um $x = 0$ und geben Sie die Form des Restterms an.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \quad (x \to 0).$$

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$, die Eigenwerte λ von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Geben Sie zusätzlich die Dimension von W an.

(c) Seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Belegen Sie dies durch eine Nicht-Null-Determinante der Matrix mit v_i als Spalten.

(d) Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(B)$. Zeigt $\det(B) \neq 0$ an, dass B invertierbar ist.

Aufgabe 3.

(a) Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Geben Sie $x(t)$ und $y(t)$ explizit an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Schreiben Sie die allgemeine Lösung von (a) in Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)},$$

und geben Sie die Koeffizienten c_1, c_2 in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen an.

(d) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ für $t \to \infty$. Geben Sie außerdem das asymptotische Verhältnis $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ an.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. Geben Sie, falls bekannt, eine Angabe zum Wert des Grenzwerts.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Ordnung 4 von $\cos x$ um $x = 0$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \quad (x \to 0).$$

(c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx.$$

(d) Bestimmen Sie für welches $p \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

konvergiert.

Aufgabe 5.

(a) Die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad L(x, y, z) = (x + y,\ y + z)$$

ist gegeben. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes $\mathrm{Im}(L)$ und liefern Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(L)$.

(b) Bestimmen Sie den Nullraum (Kern) von L und eine Basis an diesem.

(c) Geben Sie die Matrixdarstellung von L in den Standardbasen an und bestimmen Sie Rang und Nullraum dieser Matrix.

(d) Diskutieren Sie, ob L injektiv oder surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b) Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ bis Ordnung 3:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + O(x^4).$$

Es gilt $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$. Also

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \quad (x \to 0).$$

(c) Taylorentwicklung der Ordnung 4 von $f(x) = e^x$ um $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \quad (x \to 0).$$

(d) Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

denn $|x^2 \sin(1/x)| \le x^2 \to 0$ (Squeeze-Kriterium).

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

welche zu

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

führt. Zu $\lambda_1 = 1$ gehört die Eigenrichtung

$$(A - I)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \;\Rightarrow\; v^{(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zu $\lambda_2 = 3$ gehört

$$(A - 3I)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \;\Rightarrow\; v^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Schreibe $x = s,\ y = t$ und $z = -s - t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Dann

$$W = \operatorname{span}\{(1, 0, -1),\ (0, 1, -1)\},$$

sodass $\dim W = 2$.

(c) Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\det(M) = 3 \neq 0,$$

also sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(d) Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(B) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -24 + 40 - 15 = 1 \neq 0.$$

Damit ist B invertierbar.

Aufgabe 3.

(a) Lösen Sie

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}, \quad x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Diagonalisiere $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$ und $v^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ v^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Schreibe

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \alpha e^{3t}v^{(1)} + \beta e^{t}v^{(2)}.$$

Bestimme α, β über die Anfangsbedingungen:

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -\frac{1}{2}$. Also

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

d.h.

$$x(t) = \frac{e^{3t}-e^{t}}{2}, \qquad y(t) = \frac{e^{3t}+e^{t}}{2}.$$

(b) Eigenwerte und Eigenvektoren von A (wie oben):

$$\lambda_1 = 3,\ v^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1,\ v^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

(c) Allgemeine Lösung von (a)

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}v^{(2)} = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Aus $x(0)=0,\ y(0)=1$ folgt

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow\ c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Damit erhält man dieselbe Lösung wie in (a).

(d) Langzeitverhalten $t \to \infty$: Die Terme mit e^{3t} dominieren, also

$$x(t) \sim \frac{1}{2}e^{3t}, \quad y(t) \sim \frac{1}{2}e^{3t},$$

und

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{y(t)} = 1.$$

Aufgabe 4.

(a) Es sei $p = 2$. Dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist eine p-Serie mit $p > 1$ und konvergiert per Vergleich (bzw. dem Integraltest, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$). Bekannt ist der Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Taylorentwicklung von $\cos x$ ordnung 4 um $x = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \quad (x \to 0).$$

(c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx.$$

Sei $I = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ und $J = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$. Integration durch Teile liefert

$$I = J, \quad J = 1 - I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}.$$

Also

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

(d) Für welches $p \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}?$$

Die konvergente Bedingung ist $p > 1$; bei $p \leq 1$ divergiert das Integral.

Aufgabe 5.

(a) Die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad L(x, y, z) = (x + y,\ y + z)$$

hat Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von A ist 2 (die beiden Zeilen sind linear unabhängig). Damit ist $\dim \mathrm{Im}(L) = 2$ und $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$. Als Basis von $\mathrm{Im}(L)$ genügt z.B. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ (da Image ganz $\mathbb{R}^2$ ist).

(b) Nullraum (Kern) von L:

$$L(x, y, z) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + y = 0,\ y + z = 0 \ \Rightarrow\ y = -x,\ z = x.$$

Allgemein

$$(x, y, z) = t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

also $\mathrm{Null}(L) = \mathrm{span}\{(1, -1, 1)\}$.

(c) Matrixdarstellung von L in Standardbasen ist A wie oben. Rang von A ist 2; der Nullraum von A ist $\mathrm{span}\{(1, -1, 1)\}$ (Dimension 1).

(d) Diskussion der Injektivität bzw. Surjektivität: - Injektiv? Nein, da $\dim \mathrm{Null}(L) = 1 > 0$ (nicht injektiv). - Surjektiv? Ja, da $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$ (Rang 2 gleich der Zieldimension).