Probeklausur

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Bearbeitungszeit:	180 Minuten
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ bis Ordnung 3 und geben Sie die Form der Fehlerschranke an.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \quad (x \to 0).$$

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $g(x) = x^4 - 4x^2$. Geben Sie die Lage der Extrempunkte sowie deren Art (max/min) an.

(d) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Ordnung 2 von $\sin x$ um 0 und zeigen Sie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad (x \to 0).$$

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$, die Eigenwerte λ von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Geben Sie zusätzlich die Dimension von W an.

(c) Seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Belegen Sie dies durch eine Nicht-Null-Determinante der Matrix mit v_i als Spalten.

(d) Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(B)$. Zeigt $\det(B) \neq 0$ an, dass B invertierbar ist.

Aufgabe 3.

(a) Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Geben Sie $x(t)$ und $y(t)$ explizit an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Erklären Sie kurz, wie diese zur Lösung von Teil (a) beitragen.)

(c) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ für $t \to \infty$. Geben Sie außerdem das asymptotische Verhältnis $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ an.

Aufgabe 4.

(a) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$T(x, y) = (\, 2x - y,\ x + 3y\,).$$

Bestimmen Sie die Matrix von T in der Standardbasis, deren Determinante und ob T invertierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von der Abbildungsmatrix und zugehörige Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(T)$ und $\mathrm{Ker}(T)$. Geben Sie Basen je für Bild und Kern an.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rank}(T) = 2$ und damit $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Welche Folge hat dies für die Abbildung?

Aufgabe 5.

(a) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$

(b) Bestimmen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

(c) Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 x^{-p}\,dx \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Geben Sie für welchen Parameterwert p das Integral konvergiert und berechnen Sie den Wert bei einem konkreten Beispiel.

(d) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = e^x$ um $x = 0$ bis Ordnung 4 an und schreiben Sie die Restabschätzung in Landau-Notation.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) Es gilt der bekannte Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Begründung: Der Grenzwert folgt aus der Standardgrenze $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ durch die Substitution $u = x$.

(b) Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ bis Ordnung 3:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \quad (x \to 0).$$

Begründung: Die Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

führen zum Taylorpolynom bis Grad 3

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + O(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4).$$

Die Restgliederform in Lagrange-Beschreibung liefert

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{6}{24}\frac{x^4}{(1+\xi)^4} = -\frac{x^4}{4(1+\xi)^4},$$

mit ξ zwischen 0 und x. Für $|x| < 1$ gilt $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{4}$, also $R_3(x) = O(x^4)$.

(c) Lokale Extremwerte von $g(x) = x^4 - 4x^2$.

$$g'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2), \quad g''(x) = 12x^2 - 8.$$

Kritische Punkte: $x \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.
- $x = 0:$ $g''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $g(0) = 0$. - $x = \pm\sqrt{2}:$ $g''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \Rightarrow$ lokale Minima bei $g(\pm\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 = 4 - 8 = -4$.

(d) Taylorentwicklung von $\sin x$ um 0 bis Ordnung 3 (Rest ord. $O(x^5)$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x), \qquad R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{\sin\xi}{24}x^4,$$

für ξ zwischen 0 und x. Da $|\sin\xi| \leq |\xi| \leq |x| \;\Rightarrow\; |R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{24}$, folgt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad (x \to 0).$$

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$
  - Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Daraus folgt
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$
  - Zu $\lambda_1 = 3$ gehört $(A - 3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ein zugehöriger Eigenvektor ist

$$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Zu $\lambda_2 = 1$ gehört $(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ein zugehöriger Eigenvektor ist

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Basis von
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$
Eine mögliche Basis ist
$$b_1 = (1, -1, 0)^\top, \qquad b_2 = (1, 0, -1)^\top,$$
denn $x + y + z = (a + b) + (-a) + (-b) = 0$ für alle $(x, y, z) = ab_1 + b_2$. $\dim W = 2$.

(c) Gegeben seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Bilden Sie die Matrix $M = [v_1 \ v_2 \ v_3]$:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Determinante:

$$\det(M) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\cdots) + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1 + 2 = 3 \neq 0.$$

Damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(d) Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(B) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -24 + 40 - 15 = 1 \neq 0.$$

Also ist B invertierbar.

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) Lösen des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Diagonalisierung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ mit $v^{(3)} = (1,1)^\top$ und $\lambda_2 = 1$ mit $v^{(1)} = (1,-1)^\top$. Es gilt

$$x(t) = c_1 e^{3t}\, v_1^{(3)} + c_2 e^{t}\, v_1^{(1)}, \qquad y(t) = c_1 e^{3t}\, v_2^{(3)} + c_2 e^{t}\, v_2^{(1)}.$$

Mit Startwerten $(x(0), y(0)) = (0,1)$ erhält man

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = \frac{1}{2}\big(e^{3t} - e^{t}\big), \qquad y(t) = \frac{1}{2}\big(e^{3t} + e^{t}\big).$$

(b) Eigenwerte von A wie in (a): $\lambda_1 = 3$ mit $v^{(3)} = (1,1)^\top$; $\lambda_2 = 1$ mit $v^{(1)} = (1,-1)^\top$. Diese Werte tragen zur Lösung von (a) durch die Diagonalisierung $A = PDP^{-1}$ bei, wobei $P = [v^{(3)}\ v^{(1)}]$ und $D = \operatorname{diag}(3,1)$.

(c) Langzeitverhalten von $x(t), y(t)$ für $t \to \infty$: Da e^{3t} gegenüber e^{t} dominate, gilt

$$x(t) \sim \frac{1}{2}e^{3t}, \qquad y(t) \sim \frac{1}{2}e^{3t} \quad (t \to \infty).$$

Daraus folgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{3t} - e^{t}}{e^{3t} + e^{t}} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$T(x, y) = (2x - y,\ x + 3y).$$

Die Matrix in der Standardbasis ergibt sich aus den Bildern von $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$:

$$T(e_1) = (2, 1), \quad T(e_2) = (-1, 3).$$

Daraus folgt

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A_T) = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 7.$$

Da $\det(A_T) \neq 0$ ist, ist T invertierbar.

(b) Eigenwerte von $A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\det(A_T - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 7.$$

Die Lösungen sind

$$\lambda_\pm = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Zu $\lambda_\pm$ gehören komplexe Eigenvektoren; z. B.

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \lambda_\pm \end{pmatrix},$$

denen die Gleichung $(A_T - \lambda_\pm I)v_\pm = 0$ genügt.

(c) $\mathrm{Im}(T)$ und $\mathrm{Ker}(T)$. Da $\det(A_T) = 7 \neq 0$, ist der Rang von T gleich 2. Also

$$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{Ker}(T) = \{0\}.$$

Basen: - $\mathrm{Im}(T)$ hat als Basis die Spalten von A_T: $\{(2, 1)^\top, (-1, 3)^\top\}$. - $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ besitzt keinen nicht-trivialen Basisvektor; es hat die Dimension 0.

(d) Da $\mathrm{rank}(T) = 2$ gilt, ist der Abbildungstervektor bijektiv, insbesondere injektiv und surjektiv; daraus folgt, dass es genau eine Umkehrabbildung T^{-1} gibt und T invertierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 5.

(a) Stammform

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{du}{u}, \quad u = x^2+1 \quad (du = 2x\,dx) = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

(b) Zugehöriges uneigentliches Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1.$$

(c) Konvergenz des Integrals $\int_0^1 x^{-p}\,dx$ $(p \in \mathbb{R})$. Schreibt man $x^{-p} = x^\alpha$ mit $\alpha = -p$, gilt die Konvergenzbedingung $\int_0^1 x^\alpha dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > -1$, also $-p > -1 \iff p < 1$. - Falls $p < 1$: $\int_0^1 x^{-p}dx = \frac{1}{1-p}$. - Falls $p \geq 1$: Divergenz.

Beispiel: $p = 0$ liefert $\int_0^1 dx = 1$; $p = 0.5$ liefert $\int_0^1 x^{-0.5}dx = \frac{1}{1-0.5} = 2$.

(d) Taylorentwicklung von $f(x) = e^x$ um $x = 0$ bis Ordnung 4:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \quad (x \to 0).$$

Restglied in Lagrange-Form:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{e^\xi}{120}x^5,$$

für ein ξ zwischen 0 und x; insbesondere $|R_4(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{120}|x|^5 = O(x^5)$.