Probeklausur

Analysis III für Ingenieure

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^2$ ganz ist. Bestimmen Sie $f'(z)$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\sin z$ um $z = 0$ bis Ordnung 5. Geben Sie die generelle Form der Restbeziehung an.

(c) Bestimmen Sie die Residuen von $h(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ in den Polen $z = i$ und $z = -i$.

(d) Verwenden Sie den Residuensatz, um das Kontur-Integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 + 1}\, dz$$

zu berechnen.

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei das lineare System

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ von A und die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems an.

(b) Betrachten Sie das nichtlineare System

$$x' = x - y - x\,(x^2 + y^2), \qquad y' = x + y - y\,(x^2 + y^2).$$

Skizzieren Sie das Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ qualitativ und verwenden Sie hierfür eine geeignete Lyapunov-Funktion. (Beschreiben Sie die Vorgehensweise, ohne eine vollständige Berechnung zu liefern.)

(c) Betrachten Sie die Familie des linearen Systems

$$x' = \mu x - y, \qquad y' = x + \mu y.$$

Bestimmen Sie die Typen der Gleichgewichte je nach μ und beschreiben Sie die Stabilität.

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}.$$

Bestimmen Sie die Pole und deren Residuien an $z = i$ und $z = -i$.

(b) Verwenden Sie den Residuensatz, um das Kontur-Integral

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz$$

zu berechnen.

(c) Entwickeln Sie die Taylor-Reihe von f um $z = 0$ und geben Sie die ersten vier Glieder an.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'' + x = 0, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

Geben Sie $x(t)$ explizit an.

(b) Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$x'' + \lambda x = 0, \qquad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

Bestimmen Sie die Werte von λ, für die nichttriviale Lösungen existieren, und geben Sie die entsprechenden Funktionen an.

Lösungen

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^2$ ganz ist. Bestimmen Sie $f'(z)$.

Lösung. Da es sich bei f um ein Polynom handelt, ist f ganz (holomorph) auf $\mathbb{C}$. Zur Ableitung:

$$f'(z) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{2zh + h^2}{h} \;=\; 2z.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\sin z$ um $z = 0$ bis Ordnung 5. Geben Sie die generelle Form der Restbeziehung an.

Lösung. Die Maclaurin-Reihe von $\sin z$ lautet

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots .$$

Damit ist die Taylor-Polynomentwicklung von Ordnung 5

$$P_5(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}.$$

Restglied (Lagrangeform) zur Ordnung $n = 5$ ist

$$R_5(z) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} z^6 \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen 0 und } z,$$

wobei $f^{(6)}(\xi) = -\sin\xi$ ist. Daraus folgt $|R_5(z)| \le \frac{|z|^6}{6!}$ und in der Pobfuleniliy-Sicht ergibt sich tatsächlich eine führende Termierung erst beim z^7-Term, d.h. Die erste nicht verschwindende Restkomponente ist also proportional zu z^7 (aber die obige Formulierung genügt als Restbeziehung).

(c) Bestimmen Sie die Residuen von $h(z) = \frac{z}{z^2+1}$ in den Polen $z = i$ und $z = -i$.

Lösung. Die Pole sind einfache Pole bei $z = \pm i$. Es gilt

$$\operatorname{Res}_{z=i} h(z) = \lim_{z\to i} (z - i) \frac{z}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{z}{z+i} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2},$$

und

$$\operatorname{Res}_{z=-i} h(z) = \lim_{z\to -i} (z + i) \frac{z}{z^2+1} = \lim_{z\to -i} \frac{z}{z-i} = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}.$$

(d) Verwenden Sie den Residuensatz, um das Kontur-Integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\, dz$$

zu berechnen.

Lösung. Die beiden Pole $z = \pm i$ liegen innerhalb des Kreises $|z| = 2$. Die Summe der Residuen ist

$$\operatorname{Res}_{z=i} h + \operatorname{Res}_{z=-i} h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei das lineare System

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ von A und die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems an.

Lösung. Die Eigenwerte ergeben sich aus $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Für $\lambda = i$ gilt

$$(A - iI)v = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

mit der Lösung $v^{(i)} = (1, -i)^T$. Für $\lambda = -i$ erhält man

$$v^{(-i)} = (1, i)^T.$$

Allgemeine (reale) Lösung:

$$x(t) = c_1\, \Re\big(e^{it} v^{(i)}\big) + c_2\, \Im\big(e^{it} v^{(i)}\big) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos t + \beta \sin t \\ \alpha \sin t - \beta \cos t \end{pmatrix},$$

mit konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Betrachten Sie das nichtlineare System

$$x' = x - y - x\,(x^2 + y^2), \qquad y' = x + y - y\,(x^2 + y^2).$$

Skizzieren Sie das Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ qualitativ und verwenden Sie hierfür eine geeignete Lyapunov-Funktion. (Beschreiben Sie die Vorgehensweise, ohne eine vollständige Berechnung zu liefern.)

Lösung. Gleichgewichtspunkte: $(0, 0)$ sowie kein weiterer (da $x' = 0$ und $y' = 0$ implizit durch die Radialkomponenten erzwingt werden).

Vorschlag einer Lyapunov-Funktion ist

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Entlang der Trajektorien gilt

$$\dot{V} = 2xx' + 2yy' = 2(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) = 2r^2\,(1 - r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Für $0 < r < 1$ ist $\dot{V} > 0$ und somit zeigt sich eine Instabilität des Ursprunges (kein lokal asymptotisches Stabilitätskriterium, sondern Hinweis auf Instabilität). In Polarform ergibt sich zudem

$$r' = r(1 - r^2), \qquad \theta' = 1,$$

d.h. es existiert eine stabile Randbahn bei $r = 1$ (Grenzzyklus) mit periodischer Umlaufdauer 2π. Die Vorgehensweise: über die Polarform die Radialdynamik analysieren; der Ursprung ist instabil (repeller), während sich für $r \to 1$ ein stabiler Grenzzyklus ergibt.

(c) Betrachten Sie die Familie des linearen Systems

$$x' = \mu x - y, \qquad y' = x + \mu y.$$

Bestimmen Sie die Typen der Gleichgewichte je nach μ und beschreiben Sie die Stabilität.

Lösung. Die Matrix ist $A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte erhalten sich aus $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$(\mu - \lambda)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \pm i.$$

Daraus folgt: - Für $\mu < 0$: Realteil negativ, instabiler Fokus (Sattel mit Drehung) – stabiler Fokus (Scherung gegen Null). - Für $\mu > 0$: Realteil positiv, instabiler Fokus (Scherung von Null). - Für $\mu = 0$: Reiner , $\lambda = \pm i$; neutrales Gleichgewicht (Center) mit periodischer Umlaufbahn im Linearfall. Zusammengefasst: stabiler Fokus für $\mu < 0$, instabiler Fokus für $\mu > 0$; der Grenzfall $\mu = 0$ ergibt einen Center (linear).

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die Pole und deren Residuien an $z = i$ und $z = -i$.

Lösung. Pole: einfache Pole bei $z = \pm i$. Residuen:

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{z+i} = \frac{i^2}{i+i} = \frac{-1}{2i} = \frac{i}{2},$$

$$\mathrm{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)z^2}{z^2+1} = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{z-i} = \frac{(-i)^2}{-i-i} = \frac{-1}{-2i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

(b) Verwenden Sie den Residuensatz, um das Kontur-Integral

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz$$

zu berechnen.

Lösung. Alle Pole $\pm i$ liegen innerhalb der Kreislinie $|z| = 2$. Die Summe der Residuen ist

$$\frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0,$$

daher

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

(c) Entwickeln Sie die Taylor-Reihe von f um $z = 0$ und geben Sie die ersten vier Glieder an.

Lösung. Es gilt

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 \left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right) = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \cdots.$$

Die ersten vier Glieder sind

$$z^2 - z^4 + z^6 - z^8.$$

Hinweis: Die konvergente Radius-Rahmen ist 1, da die nächsten Singularitäten $\pm i$ mit Abstand 1 liegen.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'' + x = 0, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

Geben Sie $x(t)$ explizit an.

Lösung. Allgemeine Lösung der Gleichung $x''+x=0$ ist $x(t) = A\cos t + B\sin t$. Mit $x(0)=0$ folgt $A=0$; weiter $x'(t) = -A\sin t + B\cos t$ und $x'(0) = B = 1$. Somit

$$x(t) = \sin t.$$

(b) Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$x'' + \lambda x = 0, \qquad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

Bestimmen Sie die Werte von λ, für die nichttriviale Lösungen existieren, und geben Sie die entsprechenden Funktionen an.

Lösung. Für $\lambda = \mu^2 > 0$ ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t).$$

Die Bedingung $x(0) = 0$ gibt $A = 0$. Dann gilt $x(t) = B\sin(\mu t)$ und $x(1) = 0$ liefert

$$B\sin(\mu) = 0.$$

Für nichttriviale Lösungen ($B \neq 0$) muss $\sin(\mu) = 0$ sein, hence $\mu = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Damit

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \qquad x_n(t) = \sin(n\pi t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich $x'' = 0$ mit $x(0) = x(1) = 0 \Rightarrow x(t) = At + B$ und aus $x(0) = 0$ folgt $B = 0$; aus $x(1) = 0$ folgt $A = 0$, also nur die triviale Lösung. Für $\lambda = -\mu^2 < 0$ erhält man Lösungen der Form $x(t) = Ae^{\mu t} + Be^{-\mu t}$ mit $x(0) = 0).x(1) = 0$ führt jedoch zu Trivialität; daher existieren nur die positiven Eigenwerte $\lambda_n = (n\pi)^2$ mit den zugehörigen Eigenfunktionen $x_n(t) = \sin(n\pi t)$.