

Probeklausur

Mikroökonomik (4 LP)

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Mikroökonomik (4 LP)
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Erstellungsdatum:	September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mikroökonomik (4 LP)

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Formulieren Sie das Nutzennutzungsproblem eines Haushalts mit Budgetbeschränkung:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{unter } p_x x + p_y y \leq m.$$

Gegeben seien die Parameter $p_x = 2$, $p_y = 1$, $m = 20$. Schreiben Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie die ersten-Ordnung-Bedingungen ab.

(b) Sei $U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$. Mit $p_x = 2$, $p_y = 1$, $m = 20$ bestimmen Sie die Marshallian-Demandfunktionen $x^*(p_x, p_y, m)$ und $y^*(p_x, p_y, m)$ sowie das Konsumbündel, das das Budget bindet.

(c) Erläutern Sie die Slutsky-Zerlegung der Nachfrage qualitativ. Nennen Sie die substitutionelle Komponente und die Einkommenskomponente.

(d) Diskutieren Sie kurz, wie sich eine Änderung des Einkommens m auf die Konsummenge der beiden Güter auswirkt, falls U eine Cobb-Douglas-Form annimmt.

Aufgabe 2.

(a) Eine Firma besitzt eine Produktionsfunktion $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.7}$. Der Outputpreis ist $p = 10$ und die Faktorkosten $r = 2$ (Kapital) sowie $w = 3$ (Arbeit). Stellen Sie das Gewinnmaximierungsproblem auf:

$$\max_{K, L} \pi(K, L) = p F(K, L) - rK - wL.$$

Leiten Sie die ersten-order-Bedingungen ab und schreiben Sie die Gleichungen für die optimalen Faktoreinsätze K^*, L^* fest.

(b) Diskutieren Sie, unter welchen Voraussetzungen positive Faktoreinsätze sinnvoll sind. Welche Rolle spielen die Grenzproduktbeiträge in den FOC?

(c) Zeigen Sie, wie sich die Produktionsmenge $q^* = F(K^*, L^*)$ in Abhängigkeit von den Faktorkosten verhält, bzw. wie sich Preis- und Kostenverhältnisse auf die lineare Approximation der Kostenstruktur auswirken.

Aufgabe 3.

- (a) Ein Monopolist mit inverser Nachfrage $P(Q) = 100 - Q$ und Kostenfunktion $C(Q) = 20Q$ maximiert Profit. Bestimmen Sie die gewinnmaximierende Menge Q^* sowie den Preis $P^* = P(Q^*)$.
- (b) Berechnen Sie bei Q^*, P^* die Konsumentenrente und die Produzentenrente.
- (c) Skizzieren Sie konzeptionell die Deadweight Loss-Verluste durch Monopolbildung.

Aufgabe 4.

(a) Gegeben seien Nachfrage und Angebot

$$Q_d(P) = 40 - 2P, \quad Q_s(P) = 3P - 6.$$

Bestimmen Sie das Gleichgewicht (Preis und Menge).

(b) Angenommen, es wird eine Per-Unit-Steuer $t = 2$ eingeführt, die vom Hersteller getragen wird. Bestimmen Sie den neuen Gleichgewichtspreis für Verbraucher P_b und den Preis, den der Hersteller erhält $P_s = P_b - t$, sowie die neue Menge.

(c) Berechnen Sie die entstehende Deadweight Loss durch die Steuer. Formulieren Sie die relevanten Berechnungen und das Ergebnis.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Das Nutzennutzungsproblem eines Haushalts mit Budgetbeschränkung sei gegeben durch

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{unter } p_x x + p_y y \leq m.$$

Gegeben seien die Parameter $p_x = 2$, $p_y = 1$, $m = 20$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(20 - 2x - y),$$

und die ersten-Ordnung-Bedingungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = U_x(x,y) - 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = U_y(x,y) - \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 20 - 2x - y = 0.$$

(b) Sei $U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$ (Cobb-Douglas mit exponenten $1/2, 1/2$). Mit $p_x = 2$, $p_y = 1$, $m = 20$ ergeben sich die Marshallian-Demandsfunktionen (allgemein für $U(x,y) = x^a y^{1-a}$ gilt $x^* = \frac{am}{p_x}$, $y^* = \frac{(1-a)m}{p_y}$; hier $a = \frac{1}{2}$):

$$x^*(p_x, p_y, m) = \frac{(1/2)m}{p_x} = \frac{0.5 \cdot 20}{2} = 5, \quad y^*(p_x, p_y, m) = \frac{(1/2)m}{p_y} = \frac{0.5 \cdot 20}{1} = 10.$$

Das Budget-bindende Konsumbündel ist demnach

$$(x^*, y^*) = (5, 10).$$

(c) Slutsky-Zerlegung der Nachfrage qualitativ: - substitutionelle Komponente D^S : Veränderung der Nachfrage, die sich ergibt, wenn sich der Preis ändert, der Nutzen aber durch eine kompensierte Einkommenserhöhung stabilisiert wird, d. h. das reale Budget bleibt konstant bzw. das Utility-Niveau wird konstant gehalten. Für das hier betrachtete U gilt: Eine Preisänderung des Guts führt zuerst zu einer Verlagerung der Nachfrage entlang der Hicks'schen (kompensierten) Nachfragekurve; bei einer Preiserhöhung von p_x würde die Nachfrage nach Gut x sinken (substitutionelle Komponente in Richtung des Substitutionsgutes y). - Einkommenskomponente D^I : Änderung der Nachfrage infolge der kompensierten Einkommenserhöhung/-minderung, d. h. aufgrund der Veränderung des realen Einkommens, wenn Preise unverändert bleiben. Da beide Güter bei einer Einkommenserhöhung (normale Güter) nachfragen steigt, ist die Einkommenskomponente für normale Güter positiv.

In der Cobb-Douglas-Form ist bekannt, dass beide Güter normale Güter sind und die Budgetanteile konstant bleiben. Die Slutsky-Dekomposition verdeutlicht, dass der Größenfaktor der Substitution (also der prozentuale Anteil der Nachfrage, der durch das Substitutionsverhalten getrieben wird) und der Einkommensanteil zusammen die Gesamtnachfrage bestimmen. Für den gegebenen Fall (lineare Budgetrestriktion) gilt insbesondere, dass die Substitution negativ (bei Preisanstieg von x) und die Einkommenskomponente negativ (durch reale Einkommensreduktion) sein kann; insgesamt hängt die Richtung der Gesamtnachfrage von der relativen Größe der beiden Anteile ab.

(d) Änderung des Einkommens m bei einer Cobb-Douglas-Form $U(x,y) = x^a y^{1-a}$ mit $0 < a < 1$. Die Marshallian-Demandsfunktionen lauten

$$x^* = \frac{am}{p_x}, \quad y^* = \frac{(1-a)m}{p_y}.$$

Daher gelten

$$\frac{\partial x^*}{\partial m} = \frac{a}{p_x} > 0, \quad \frac{\partial y^*}{\partial m} = \frac{1-a}{p_y} > 0.$$

Mit $a = \frac{1}{2}$, $p_x = 2$, $p_y = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial x^*}{\partial m} = \frac{1/2}{2} = 0.25, \quad \frac{\partial y^*}{\partial m} = \frac{1/2}{1} = 0.5.$$

Aufgabe 2.

(a) Eine Firma besitzt die Produktionsfunktion $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.7}$. Der Outputpreis ist $p = 10$ und die Faktorkosten $r = 2$ (Kapital) sowie $w = 3$ (Arbeit). Stellen Sie das Gewinnmaximierungsproblem auf:

$$\max_{K, L} \pi(K, L) = p F(K, L) - rK - wL.$$

Es folgt

$$\pi(K, L) = 10 K^{0.3} L^{0.7} - 2K - 3L.$$

Die ersten-order-Bedingungen (FOC) lauten

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 10 \cdot 0.3 K^{-0.7} L^{0.7} - 2 = 0 \implies 3 K^{-0.7} L^{0.7} = 2,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 10 \cdot 0.7 K^{0.3} L^{-0.3} - 3 = 0 \implies 7 K^{0.3} L^{-0.3} = 3.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die optimalen Faktoreinsätze (K^*, L^*) durch Lösen der Gleichungssysteme. Die beiden Gleichungen führen jedoch zu unvereinbaren Verhältnissen der Inputmengen, d. h. es existiert kein positives Paar (K^*, L^*) , das beide FOC gleichzeitig erfüllt. Man erhält vielmehr eine widersprüchliche Bedingung für das Verhältnis L/K :

$$\left(\frac{L}{K}\right)^{0.7} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \left(\frac{K}{L}\right)^{0.3} = \frac{3}{7},$$

was sich nicht gleichzeitig erfüllen lässt. Damit existiert kein internes Optimum. Die Gewinnfunktion ist bei konstanten Erträgen (CRS) in Richtung unbeschränkten Produktionsausbaues entweder nach oben unbeschränkt oder, falls das per-Unit-Gewinn-Kraft-Verhältnis negativ ist, konvergiert sie gegen 0. Im konkreten Fall zeigt eine direkte Betrachtung der Profitgröße entlang einer Richtung $L = cK$ mit $c > 0$:

$$\pi(K, L) = [10 c^{0.7} - (2 + 3c)] K.$$

Die Funktion $g(c) = 10 c^{0.7} - (2 + 3c)$ besitzt ein Maximum bei

$$g'(c) = 10 \cdot 0.7 c^{-0.3} - 3 = 0 \implies c^{0.3} = \frac{10 \cdot 0.7}{3} \approx \frac{7}{3},$$

also

$$c^* \approx \left(\frac{7}{3}\right)^{1/0.3} \approx 16.87.$$

An dieser Stelle ist

$$g(c^*) \approx 10 c^{*0.7} - (2 + 3c^*) \approx 72.2 - (2 + 50.6) \approx 19.6 > 0.$$

Da $\pi(K, L) = g(c) K$ und K beliebig groß gewählt werden kann, ist π entwickelbar unbeschränkt nach oben. Folglich existiert kein endliches Profitmaximum; das Problem ist unbeschränkt.

(b) Unter welchen Voraussetzungen sind positive Faktoreinsätze sinnvoll? Welche Rolle spielen die Grenzproduktbeiträge in den FOC? Für ein interiores Maximum müsste gelten $p MP_K = r$ und $p MP_L = w$ gleichzeitig. Hier

$$MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = 0.3 K^{-0.7} L^{0.7}, \quad MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = 0.7 K^{0.3} L^{-0.3}.$$

Die Gleichungen $10 MP_K = 2$ und $10 MP_L = 3$ würden dem Paar

$$(L/K)^{0.7} = \frac{2}{3}, \quad (K/L)^{0.3} = \frac{3}{7}$$

entsprechen, deren gleichzeitige Lösung jedoch illusorisch ist (inkonsistente Verhältnisanforderungen). Daher gibt es kein internes Optimum; positive Faktoreinsätze wären zwar sinnvoll, falls man einen substanziell positiven per-Unit-Gewinn in einer bestimmten Richtung $L = cK$ erzielt, doch aufgrund der CRS-Charakteristik kann dieses Profitmaximum unbeschränkt sein (wie in (a) gezeigt). Die Grenzproduktbeiträge geben auf dem Weg zu einem potenziellen internen Optimum die zusätzlichen Erlöse pro zusätzlich eingesetzten Input an; in diesem Beispiel führen sie zu keiner konsistenten Gleichsetzung, sodass kein endliches Optimum entsteht.

(c) Zeigen Sie, wie sich die Produktionsmenge $q^* = F(K^*, L^*)$ in Abhängigkeit von den Faktorkosten verhält, bzw. wie sich Preis- und Kostenverhältnisse auf die lineare Approximation der Kostenstruktur auswirken. Da kein internes Optimum existiert (siehe (a)), ist K^*, L^* nicht eindeutig definiert. Insgesamt gilt jedoch folgendes Gedankenspiel: Für eine vorgegebene Richtung $L = cK$ ist

$$q = F(K, L) = K^{0.3}(cK)^{0.7} = c^{0.7}K,$$

und der Gewinn pro Einheit Scale ist

$$\pi(K, L)/K = p c^{0.7} - (r + wc) = g(c).$$

Das maximale per-unit-Gewinn-Verhältnis ergibt sich aus dem Maximum von $g(c)$; wie in (a) berechnet, ist dieses Maximum positiv (etwa bei $c^* \approx 16.87$ mit $g(c^*) > 0$), wodurch der Gesamtnutzen durch Skalierung von K unbegrenzt steigt. Die Kostenstruktur lässt sich insofern linear annähern, als bei einer gegebenen Richtung $L = cK$ die Gesamtkosten $C(K, L) = rK + wL = (r + wc)K$ eine lineare Kostenfunktion in der Größenordnung von K mit Steigung $r + wc$ darstellen. Die Wahl von Preis p und Kostenparametern bestimmt das optimale Verhältnis c (hier c^*), welches die Steigung der Kostenlinie relativ zum Erlös hebt. Da jedoch kein endliches Optimum existiert, ist q^* nicht eindeutig definiert; die zentrale Botschaft ist, dass das Verhältnis c und damit die effektiven Grenzkosten von der Größe des Preises p und der Kostenverhältnisse abhängen, wobei eine positive per-unit-Gewinn-Region zu unbeschränkter Outputexpansion führt.

Aufgabe 3.

(a) Monopolist mit invertierter Nachfrage $P(Q) = 100 - Q$ und Kostenfunktion $C(Q) = 20Q$ maximiert Profit. Der Gewinn ist

$$\pi(Q) = P(Q)Q - C(Q) = (100 - Q)Q - 20Q = 100Q - Q^2 - 20Q = 80Q - Q^2.$$

FOC: $\frac{d\pi}{dQ} = 80 - 2Q = 0 \Rightarrow Q^* = 40$. Der dazugehörige Preis ist

$$P^* = P(Q^*) = 100 - Q^* = 60.$$

(b) Konsumentenrente und Produzentenrente bei $Q^* = 40$, $P^* = 60$.

- Konsumentenrente (KR): Unter der Nachfragekurve bis zum Gleichgewichtspreis; das Gebiet über dem Preis, unter der Nachfragefunktion von 0 bis Q^* :

$$KR = \frac{1}{2} (P_{\max} - P^*) Q^* = \frac{1}{2} (100 - 60) \cdot 40 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 800.$$

- Produzentenrente (PR): Fläche über der Grenzkostenlinie (hier konstant) bis zum Produktionsniveau; bei linearer Kostenfunktion

$$PR = (P^* - MC) Q^* = (60 - 20) \cdot 40 = 40 \cdot 40 = 1600.$$

(c) Skizzieren Sie konzeptionell die Deadweight Loss-Verluste durch Monopolbildung. Der Monopolpreis liegt über dem Gleichgewichtspreis der vollständigen Konkurrenz, wodurch die produzierte Menge unterhalb der sozial optimalen Menge liegt. Die Deadweight Loss (DWL) ergibt sich als das Dreiecksgebiet zwischen der Nachfrage- und der Grenzkostenlinie von der Menge Q^* bis zur konkurrenzmäßigen Gleichgewichtsmenge (hier Q^{CC}); graphisch ist der DWL der Bereich, der weder von Konsumenten- noch von Produzentenrente abgedeckt wird.

Aufgabe 4.

(a) Gegeben seien Nachfrage und Angebot

$$Q_d(P) = 40 - 2P, \quad Q_s(P) = 3P - 6.$$

Bestimmen Sie das Gleichgewicht (Preis und Menge).

Gleichgewicht entsteht, wenn $Q_d(P) = Q_s(P)$:

$$40 - 2P = 3P - 6 \Rightarrow 46 = 5P \Rightarrow P^* = \frac{46}{5} = 9,2.$$

Dann $Q^* = Q_d(P^*) = 40 - 2(9,2) = 40 - 18,4 = 21,6$.

(b) Angenommen, es wird eine Per-Unit-Steuer $t = 2$ eingeführt, die vom Hersteller getragen wird. Bestimmen Sie den neuen Gleichgewichtspreis für Verbraucher P_b und den Preis, den der Hersteller erhält $P_s = P_b - t$, sowie die neue Menge.

Die neue Angebotsfunktion lautet $Q_s(P_s) = 3P_s - 6 = 3(P_b - t) - 6 = 3P_b - 6 - 6 = 3P_b - 12$.
Gleichgewicht: $Q_d(P_b) = Q_s(P_b)$:

$$40 - 2P_b = 3P_b - 12 \Rightarrow 52 = 5P_b \Rightarrow P_b = \frac{52}{5} = 10,4.$$

Der Erlös an den Produzenten ist $P_s = P_b - t = 10,4 - 2 = 8,4$. Die neue Menge ist

$$Q = Q_d(P_b) = 40 - 2(10,4) = 40 - 20,8 = 19,2.$$

(c) Berechnen Sie die entstehende Deadweight Loss durch die Steuer. Der ursprüngliche Gleichgewichtspunkt liegt bei $P^* = 9,2$, $Q^* = 21,6$; der neue liegt bei $P_b = 10,4$, $Q = 19,2$. Die Reduktion der Menge beträgt $\Delta Q = 21,6 - 19,2 = 2,4$. Die Steuerhöhe beträgt $t = 2$. Daher

$$DWL = \frac{1}{2} \Delta Q \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 2 = 2,4.$$