

Probeklausur

Elektrische Netzwerke

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Elektrische Netzwerke
Bearbeitungszeit: 180 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Elektrische Netzwerke

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

Aufgabe 1.

- (a) Gegeben sei eine Reihenschaltung aus Widerstand R und Kondensator C , die von einer Quellenspannung $V_s(t)$ angetrieben wird. Schreiben Sie die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung $v_C(t)$.
- (b) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung von $v_C(t)$ und des Stroms $i(t)$ nach dem Einschalten des Anstiegs von $V_s(t)$ auf einen Gleichspannungswert V_0 .
- (c) Welche Werte erreichen $v_C(t)$ und $i(t)$ im stationären Zustand $t \rightarrow \infty$ für $V_s(t) = V_0$?
- (d) Skizzieren Sie qualitativ die zeitlichen Verläufe von $v_C(t)$ und $i(t)$ über die Zeit.

Aufgabe 2.

(a) Gegeben ist eine Reihenschaltung aus Widerstand R , Induktivität L und Kondensator C sowie eine sinusförmige Quelle $V_s(t) = V_m \cos(\omega t)$. Geben Sie die Impedanz der Schaltung in der Form $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ an.

(b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_0 und die Impedanz am Resonanzpunkt.

(c) Leiten Sie den Zusammenhang $I(\omega) = V_s(\omega)/Z(\omega)$ her und geben Sie die Stromstärke $I(\omega)$ als Funktion von ω an.

(d) Diskutieren Sie das Verhalten von $Z(\omega)$ und $I(\omega)$ im Frequenzbereich nahe der Resonanz.

Aufgabe 3.

- (a) In einer Schaltung liegen eine Spannungsquelle V_s und drei Widerstände so verbunden, dass Knotenwerte V_1, V_2, V_3 entstehen. Wenden Sie die Knotengleichungen an, um die Spannungen zu bestimmen. Gegeben seien $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ und $V_s = 5 \text{ V}$ an Knoten 1, 2 und 3 entsprechend. Formulieren Sie die Gleichungen.
- (b) Lösen Sie die Gleichungen rechnerisch, um die Knoten spannungen V_1, V_2, V_3 zu ermitteln.
- (c) Bestimmen Sie die Ströme durch die Widerstände R_1, R_2, R_3 und überprüfen Sie die Knotenbilanz.
- (d) Berechnen Sie die Gesamtleistung, die von der Quelle geliefert wird.

Aufgabe 4.

- (a) Gegeben ist ein Vierpol mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Leiten Sie eine geeignete Ersatzschaltung her, um die Übertragungsfunktion $H(s) = I_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$ zu bestimmen. Geben Sie die zentralen Gleichungen an.
- (b) Bestimmen Sie die Grenzfrequenzen des Netzwerks und diskutieren Sie das Frequenzverhalten.
- (c) Welche Eigenschaften besitzt die Impedanz bei hohen Frequenzen, und welche Parameter beeinflussen das Verhalten?
- (d) Diskutieren Sie die Eignung dieses Netzwerks für zeitliche Schalthandhabungen unter Sicherheitsaspekten.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

Lösung 1.

(a) Gegeben sei eine Reihenschaltung aus Widerstand R und Kondensator C , die von einer Quellenspannung $V_s(t)$ angetrieben wird. Die Reihenschaltung erfüllt KVL:

$$V_s(t) = v_R(t) + v_C(t) = R i(t) + v_C(t),$$

mit dem Strom durch den Aufbau $i(t) = C \frac{dv_C}{dt}$. Eliminieren von $i(t)$ ergibt die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung $v_C(t)$:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_s(t), \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} V_s(t). \quad (1)$$

(b) Nach dem Einschalten des Gleichspannungsanstiegs $V_s(t) = V_0 u(t)$ gilt initial $v_C(0) = v_{C0}$ (typischerweise $v_{C0} = 0$ bei entladener Kapazität). Die Lösung der inhomogenen ersten Ordnung ist

$$v_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) + v_{C0} e^{-t/(RC)}, \quad t \geq 0.$$

Der Strom ist

$$i(t) = \frac{V_s(t) - v_C(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} - \frac{v_{C0}}{R} e^{-t/(RC)}.$$

Für den Fall $v_{C0} = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$v_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right), \quad i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)}.$$

(c) Im stationären Zustand $t \rightarrow \infty$ gilt

$$v_C(\infty) = V_0, \quad i(\infty) = 0.$$

(d) Qualitative zeitliche Verläufe: - $v_C(t)$: monotoner Anstieg von $v_C(0) = 0$ auf $v_C(\infty) = V_0$ mit Charakteristik $\tau = RC$. Kurve folgt einer exponentiellen Aufladekurve. - $i(t)$: exponentieller Abfall von Anfangsstrom $i(0) = V_0/R$ auf $i(\infty) = 0$ mit der gleichen Zeitkonstante $\tau = RC$.

Lösung 2.

(a) Die Impedanz der Reihenschaltung aus R , L und C gegenüber einer sinusförmigen Quelle $V_s(t) = V_m \cos(\omega t)$ lautet

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

(b) Resonanzfrequenz und Impedanz am Resonanzpunkt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z(\omega_0) = R \quad (\text{reiner Realteil}).$$

(c) Zusammenhang

$$I(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V_m}{R + j\left(\omega L - 1/(\omega C)\right)}.$$

Darstellung in Betrag/Phase:

$$|I(\omega)| = \frac{|V_m|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}, \quad \angle I = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \right).$$

(d) Verhalten nahe der Resonanz: - Bei $\omega \approx \omega_0$ dominiert der reelle Anteil, der Phasenwinkel von I liegt nahe 0° (bei idealer Resonanz). Die Stromstärke hat ihr Maximum:

$$|I|_{\omega=\omega_0} \approx \frac{V_m}{R}.$$

- Für $\omega < \omega_0$ ist der reaktive Anteil kapazitiv ($\omega L - 1/(\omega C) < 0$), für $\omega > \omega_0$ induktiv (> 0). - Die Güte des Schwingkreises definiert sich über $Q = \omega_0 L / R = \frac{1}{\omega_0 RC}$ und der Bandbreite $\Delta\omega \approx \frac{R}{L}$ (bei Serie-RLC).

Lösung 3.

(a) Die Knotengleichungen werden mit der Knoten-Spannungstechnik aufgestellt. Sei V_1, V_2, V_3 die Knotenspannungen und V_s die anliegende Spannungsquelle. Falls zwischen den Knoten jeweils Widerstände R_{12}, R_{13}, R_{23} bestehen, dann lauten die Gleichungen (KCL an Knoten 1, 2, 3):

$$\frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_{12}} + \frac{V_1 - V_3}{R_{13}} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{V_2 - V_s}{R_2} + \frac{V_2 - V_1}{R_{12}} + \frac{V_2 - V_3}{R_{23}} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{V_3 - V_s}{R_3} + \frac{V_3 - V_1}{R_{13}} + \frac{V_3 - V_2}{R_{23}} = 0. \quad (4)$$

Analog konstruiert man die Gleichungen, falls andere Netzverbindungen existieren. In Matrixform ergibt sich

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{b},$$

mit

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} V_s/R_1 \\ V_s/R_2 \\ V_s/R_3 \end{bmatrix},$$

und dem Leitungsgitter (G-Koeffizienten)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{12}} & -\frac{1}{R_{13}} \\ -\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} & -\frac{1}{R_{23}} \\ -\frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}} \end{bmatrix}.$$

(b) Die Lösung erfolgt durch

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b},$$

sofern $\det \mathbf{G} \neq 0$. Die Knoten spannungen V_1, V_2, V_3 ergeben sich direkt aus dieser Inversion.

(c) Ströme durch die Widerstände R_1, R_2, R_3 (in Richtung vom Knoten zur Quelle) ermitteln sich aus

$$i_1 = \frac{V_s - V_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V_s - V_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{V_s - V_3}{R_3}.$$

Die Knotenbilanz ist damit erfüllt, da $i_s = i_1 + i_2 + i_3$ der von der Quelle gelieferte Gesamtstrom ist.

(d) Gesamtleistung, die von der Quelle geliefert wird:

$$P_{\text{ges}} = V_s i_s = V_s (i_1 + i_2 + i_3) = V_s \left(\frac{V_s - V_1}{R_1} + \frac{V_s - V_2}{R_2} + \frac{V_s - V_3}{R_3} \right).$$

Hinweis. Die konkreten Werte von (V_1, V_2, V_3) und damit i_1, i_2, i_3 sowie die Leistungswerte hängen stark von der konkreten Netzverbindung ab (insbesondere von den Zwischenwiderständen R_{12}, R_{13}, R_{23}). Für eine eindeutige numerische Lösung muss das Schaltbild vorliegen. Als Beispiel sei hier eine symmetrische Topologie mit $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 1 \text{ k}\Omega$ erwähnt (kann als plausibles Unterrichtsbeispiel dienen). Dann ergeben sich über die obigen Gleichungen eindeutige Werte für V_i , i_i und P_{ges} durch Lösen der linearen Gleichung $\mathbf{GV} = \mathbf{b}$.

Lösung 4.

(a) Eine Allgemeine Vorgehensweise zur Ableitung der Übertragungsfunktion $H(s) = I_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$ verwendet eine Ersatzschaltung des Vierpols (z. B. in Form eines Impedanz-/Admittanz-Netzes). Berechne für eine gegebene Ersatzschaltung durch eine Testquelle (V_{in} , I_{out}) die Beziehung

$$H(s) = \frac{I_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)}.$$

Konkrete Schritte: - Ersetze den Vierpol durch seine Z- oder Y- (Admittanz-/Impedanz-)Darstellung. - Schalte eine Testquelle an der Eingangsseite ein ($V_{\text{in}}(s)$) und lasse die Ausgangsseite offen oder bestimme den Ausgangsstrom bei einer definierten Last, je nach Definition von $H(s)$. - Schreibe die Knoten-/Maschinen-Gleichungen des Ersatzschaltbilds auf und löse sie algebraisch nach $I_{\text{out}}(s)$ in Abhängigkeit von $V_{\text{in}}(s)$. - Damit erhältst du $H(s) = I_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$.

(b) Bestimme die Grenzfrequenzen des Netzwerks und diskutiere das Frequenzverhalten: - Die Pole/Nullen von $H(s)$ bestimmen Grenz- bzw. Charakterfrequenzen. Typischerweise ergeben sich die Grenzfrequenzen aus den Nullen/Polen der Übertragungsfunktion, die durch die Netzwerke (Kapazitäten, Induktivitäten, Widerstände) festgelegt sind. - Diskutiere qualitativ, wie sich der Ausgangsstrom bei niedrigen Frequenzen (Kapazitätswiderstände dominieren) bzw. hohen Frequenzen (Koppelung durch Kapazitäten, Induktivitäten) verhält.

(c) Welche Eigenschaften besitzt die Impedanz bei hohen Frequenzen, und welche Parameter beeinflussen das Verhalten? - Allgemein gilt: Bei hohen Frequenzen nähern sich Kapazitäten idealen Kurzschlüssen an ($Z_C \rightarrow 0$), Induktivitäten werden zu hohen Impedanzen ($Z_L \rightarrow \infty$). - Das Verhalten der Gesamtimpedanz des Vierpols hängt von der konkreten Vernetzung ab und wird durch die Anordnung der passiven Bauteile bestimmt (z. B. ob Pfade durch Kapazitäten oder durch Induktivitäten dominieren). Wichtige Einflussparameter sind die Werte der Bauteile und deren Verknüpfung (seriell/parallel).

(d) Diskutiere die Eignung dieses Netzwerks für zeitliche Schalthandhabungen unter Sicherheitsaspekten. - Zeitliche Schalthandhabung (z. B. Einschaltströme, transienten Reaktionen) wird maßgeblich durch die Zeitkonstanten der Bauteile beeinflusst (z. B. RC-, RL-Transienten). - Sicherheitsrelevante Aspekte: Vermeidung von übermäßigen Einschaltströmen, Spannungsüberhöhungen, ausreichende Entkopplung/Schutzeinrichtungen (z. B. Snubber, Grenzwerte für maximale Ströme, geeignete Leiterbahnen und Bauteilqualitäten).