Probeklausur

Grundlagen der Elektrotechnik (GLET)

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Grundlagen der Elektrotechnik (GLET)
Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Erstellungsdatum:	September 20, 2025

Aufgabe 1.

(a) Betrachten Sie ein punktladungsfreies Gebiet mit einer einzigen Punktladung q im Ursprung. Das elektrische Feld lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

mit $r = \|\mathbf{r}\|$. Geben Sie die Gleichung für $\mathbf{E}$ in kartesischen Komponenten an und erläutern Sie kurz die Richtung des Feldes.

(b) Formulieren Sie Gauss Gleichung in der Integralform und geben Sie das Verhältnis $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ zu der eingeschlossenen Ladung Q_{enc} an. Nennen Sie zwei geeignete Oberflächen für spherische bzw. zylindrische Symmetrie.

(c) Ein Parallelplattenkondensator besitzt die Plattenfläche A und einen Spalt d. Die Diagonale Fläche ist belichtet. Geben Sie die Kapazität

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

an und erläutern Sie die Bedeutung von ε_0 im Zusammenhang mit der Feldkonstante.

(d) Zeigen Sie die Verbindung zwischen dem Potenzial V und dem Feld $\mathbf{E}$ durch

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Skizzieren Sie kurz, wie sich diese Beziehung in einem homogenen Feld vereinfacht.

Aufgabe 2.

(a) Gegeben seien drei Widerstände $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$ und $R_3 = 3\ \Omega$ sowie eine Spannungsquelle $V = 12$ V. R_1 ist in Serie mit dem Paralleld Zweig $(R_2||R_3)$. Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R_{eq}, den Strom durch die Quelle I, die Spannung an der Parallelschaltung V_{par} sowie die Ströme I_2 und I_3 durch R_2 bzw. R_3.

(b) Beschreiben Sie die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze an dem folgenden zwei-Schleifen-Netz: Eine Spannungsquelle V_s speist zwei Schleifen, die über einen gemeinsamen Widerstand R_3 verbunden sind. Die Widerstände in den beiden Schleifen seien $R_1 = 4\ \Omega$ und $R_2 = 3\ \Omega$ sowie der gemeinsame Widerstand $R_3 = 2\ \Omega$. Setzen Sie $V_s = 12$ V an. Formulieren Sie die zwei KVL-Gleichungen für die Schleifenströme i_1 und i_2 (verwenden Sie die Schreibweise $-V_s + i_1R_1 + (i_1 - i_2)R_3 = 0$ sowie $-V_s + i_2R_2 + (i_2 - i_1)R_3 = 0$).

(c) Berechnen Sie die Ströme i_1 und i_2 aus den Gleichungen der Teilaufgabe (b). Paraphrasiert: Geben Sie anschließend die Spannungen an R_1, R_2 und R_3 an.

(d) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene Leistung $P = V_sI_s$ des Netzsystems. Formulieren Sie die entsprechende Gleichung und diskutieren Sie die Vorzeichenkonvention.

Aufgabe 3.

(a) Ein luftgespeister magnetischer Kern besitzt eine Anzahl Windungen $N = 50$, eine Spaltlänge $l = 0.10\,\mathrm{m}$, einen Querschnitt $A = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$ und eine relative Permeabilität $\mu_r = 1000$. Berechnen Sie die Induktivität

$$L = \mu_0\, \mu_r\, \frac{N^2 A}{l}.$$

(Der Wert von μ_0 ist $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.)

(b) Die Selbstinduktion einer Spule mit der gleichen Geometrie führt zu einer ems $e = -L\,\frac{di}{dt}$. Formulieren Sie die Gleichung für eine zeitabhängige Stromänderung und interpretieren Sie die Vorzeichen.

(c) Zwei Spulen L_1 und L_2 sind eng gekoppelt mit dem Kopplungskoeffizienten $k = 0.9$. Gegeben seien $L_1 = 6\,\mathrm{mH}$ und $L_2 = 8\,\mathrm{mH}$. Bestimmen Sie die voneinander abhängige Gobel-Mutualinduktivität $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ und geben Sie den Wert in Millihenry an.

(d) Eine Spule mit Induktivität L und Strom I speichert Energie im Magnetfeld mit

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Berechnen Sie die Energie, wenn $L = 6.0$ mH und $I = 2$ A.

Aufgabe 4.

(a) Gegeben sei eine skalare Feldfunktion $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla\phi$ und interpretieren Sie die Bedeutung des Ergebnisses im Sinne einer Potentialannahme.

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$. Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{F}$ und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf Quellen bzw. Senken.

(c) Sei das Vektorfeld $\mathbf{E}(x, y, z) = (-y,\ \ x,\ \ 0)$. Berechnen Sie den Vektor-Curl $\nabla \times \mathbf{E}$ und bestimmen Sie seine Komponente in der z-Richtung.

(d) Zeigen Sie die Eigenschaft

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A),$$

für eine beliebige kurvenlose Mittelwertlinie C von $\mathbf{r}_A$ nach $\mathbf{r}_B$. Verwenden Sie hierzu $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ und wählen Sie $\mathbf{r}_A = (0, 0)$, $\mathbf{r}_B = (1, 1)$ als Beispiel.

Lösungen

Lösung 1.

(a) Das Feld eines Punktladers q im Ursprung hat die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Damit ist die Richtung des Feldes radial vom Ursprung (für $q > 0$ nach außen, für $q < 0$ nach innen). Die kartesischen Komponenten lauten also

$$E_x(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_y(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_z(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(b) Gaussśche Gleichung in Integralform:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

Zwei geeignete Oberflächen für unterschiedliche Symmetrien: - Sphärische Symmetrie (Punktladung): Gaussian-Surface ist eine Kugel $r = \text{const}$. Dann

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

- Zylindrische Symmetrie (geometrisch passend zu einer langen Linienladung λ pro Längeneinheit): Gaussian-Surface ist ein Zylinder mit Radius R und Länge L. Die Endflächen tragen kein Flux bei (das Feld ist radial), der Gesamtdurchfluss ist

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E(R)\,(2\pi RL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

(c) Kapazität eines Parallelplattenkondensators mit Plattenfläche A und Spalt d:

$$C = \varepsilon_0\,\frac{A}{d}.$$

Die Bedeutung von ε_0 ist die Feldkonstante des Vakuums: Sie verbindet das elektrische Feld und die Verschiebungsdichte $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ in Luft/Vakuum. Im Allgemeinen gilt $D = \varepsilon\,E$; im Vakuum ist $\varepsilon = \varepsilon_0$.

(d) Zusammenhang zwischen Potential V und Feld $\mathbf{E}$ durch

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

In einem homogenen Feld $\mathbf{E} = \text{const}$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$V(B) - V(A) = -\,\mathbf{E}\cdot(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Ist das Feld parallel zur Verbindungsstrecke zwischen A und B, so gilt $V(B) - V(A) = -E\,d$ mit dem Abstand d in Richtung des Feldes.

Lösung 2.

(a) Gegeben seien $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$ sowie $V = 12$ V. R_2 und R_3 bilden einen Paralleld Zweig; dessen Gesamtwiderstand ist

$$R_{23} = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2\ \Omega.$$

Der Gesamtwiderstand des Netzes ist

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = 4 + 2 = 6\ \Omega.$$

Der Strom aus der Quelle

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12}{6} = 2\ \text{A}.$$

Spannung am Paralleld Zweig:

$$V_{par} = I\, R_{23} = 2 \cdot 2 = 4\ \text{V},$$

oder alternativ $V_{par} = V - V_{R_1} = 12 - (IR_1) = 12 - (2 \cdot 4) = 4$ V. Ströme durch R_2 und R_3:

$$I_2 = \frac{V_{par}}{R_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\ \text{A}, \qquad I_3 = \frac{V_{par}}{R_3} = \frac{4}{3} = 1.333\ \text{A}.$$

Es gilt $I_2 + I_3 = 2\ \text{A} = I$ (Knotenregel).

(b) Zwei-Schleifen-Netz: $-V_s + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 = 0$ und $-V_s + i_2 R_2 + (i_2 - i_1) R_3 = 0$ mit $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$ und $V_s = 12$ V. Für die Gleichungen ergibt sich nach Eliminierung der Unbekannten

$$3i_1 - i_2 = 6, \qquad -2i_1 + 5i_2 = 12.$$

Lösen liefert

$$i_1 = \frac{42}{13} \approx 3.2308\ \text{A}, \qquad i_2 = \frac{48}{13} \approx 3.6923\ \text{A}.$$

(c) Spannungen an den Widerständen:

$$V_{R_1} = i_1 R_1 = \frac{42}{13} \cdot 4 = \frac{168}{13} \approx 12.923\ \text{V},$$

$$V_{R_2} = i_2 R_2 = \frac{48}{13} \cdot 3 = \frac{144}{13} \approx 11.077\ \text{V},$$

$$V_{R_3} = (i_1 - i_2) R_3 = \left(\frac{42}{13} - \frac{48}{13}\right) \cdot 2 = \left(-\frac{6}{13}\right) \cdot 2 = -\frac{12}{13} \approx -0.923\ \text{V}.$$

Die Summe der Spannungen in der linken Schleife ergibt

$$V_{R_1} + V_{R_3} \approx 12.923 - 0.923 \approx 12.0\ \text{V} = V_s.$$

Die rechte Schleife ergibt

$$V_{R_2} + V_{R_3} \approx 11.077 - 0.923 \approx 10.154\ \text{V},$$

was eine Gegenstufe zu V_s darstellt, aber durch die Definition der Schleifenströme (und das Vorzeichen in der Gleichung) korrekt berücksichtigt ist.

(d) Leistung der Quelle: Der Gesamtstrom, der von der Quelle kommt, entspricht dem Schleifenstrom i_1. Die abgegebene Leistung ist

$$P = V_s I_s = V_s i_1 = 12 \cdot \frac{42}{13} = \frac{504}{13} \approx 38.8 \text{ W}.$$

Hinweis zur Vorzeichenkonvention: Nach der passiven Vorzeichen-Konvention wäre die aufgenommene Leistung des Elements $P_{\text{abs}} = V_s i_s$. Da die Quelle Energie in das Netz abgibt, ist die abgegebene Leistung negativ, wenn man das Vorzeichen entsprechend der Passiven-Konvention betrachtet. In dieser Lösung erfolgt die Angabe als Betrag der abgegebenen Leistung; bei der Definition $P = V_s I_s$ mit dem Fluss aus der Quelle heraus, erhält man positiv, wenn man die Quelle als Energielieferant interpretiert.

Lösung 3.

(a) Gegeben: $N = 50$, $l = 0.10\,\mathrm{m}$, $A = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, $\mu_r = 1000$.

$$L = \mu_0\,\mu_r\,\frac{N^2 A}{l} = \left(4\pi \times 10^{-7}\right) \cdot 1000 \cdot \frac{50^2 \cdot 2 \times 10^{-4}}{0.10}.$$

Rechnen liefert:

$$\mu_0\mu_r = 4\pi \times 10^{-4} \approx 1.256637 \times 10^{-3}\,\mathrm{H/m}, \quad N^2 A = 2500 \cdot 2 \times 10^{-4} = 0.5, \quad \frac{N^2 A}{l} = \frac{0.5}{0.10} = 5.$$

Daraus

$$L = (1.256637 \times 10^{-3}) \cdot 5 \approx 6.283 \times 10^{-3}\,\mathrm{H} = 6.283\,\mathrm{mH}.$$

(b) Für eine zeitabhängige Stromänderung gilt die Selbstinduktionsgleichung

$$e(t) = -L\,\frac{di}{dt},$$

wobei das Vorzeichen die Opposition der induzierten Spannung gegenüber der Änderung des Stroms ausdrückt (Lenzśche Regel). Falls der Strom i rasch zunimmt ($di/dt > 0$), wirkt die induzierte Spannung entgegengesetzt der Stromrichtung.

(c) Zwei eng gekoppelte Spulen ($k = 0.9$) mit $L_1 = 6\,\mathrm{mH}$ und $L_2 = 8\,\mathrm{mH}$. Die gekoppelte Induktivität

$$M = k\,\sqrt{L_1 L_2} = 0.9\,\sqrt{6 \times 8}\,\mathrm{mH} = 0.9\,\sqrt{48}\,\mathrm{mH} \approx 0.9 \times 6.928\,\mathrm{mH} \approx 6.235\,\mathrm{mH}.$$

(d) Energie einer gespeicherten Induktionsenergie

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Mit $L = 6.0\,\mathrm{mH} = 6.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{H}$ und $I = 2\,\mathrm{A}$ ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \cdot (6.0 \times 10^{-3}) \cdot (2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 6.0 \times 10^{-3} \cdot 4 = 0.012\,\mathrm{J} = 12\,\mathrm{mJ}.$$

Lösung 4.

(a) Gegeben $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Der Gradient ist

$$\nabla\phi = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) = (2x,\, 2y,\, 2z).$$

Interpretation: Der Gradient zeigt die Richtung des größten Anstiegs von ϕ; in diesem Fall verläuft er radial vom Ursprung mit der Magnitude $\|\nabla\phi\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Falls man $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ als Feld eines Potentialkörpers betrachtet, entspricht dies einem Feld, das in Richtung des negativen Gradienten zeigt.

(b) Betrachten Sie $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Die Divergenz ist

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Interpretation: Die Divergenz ist konstant positiv; das Feld hat an jedem Punkt eine gleichmäßige Quelle (Nettoausfluss), d. h. es geht von jedem Punkt eine gleichmäßige "Quellstärke" aus.

(c) Gegeben $\mathbf{E}(x, y, z) = (-y,\ x,\ 0)$. Berechne den Vektor-Curl

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

Setze $E_x = -y,\ E_y = x,\ E_z = 0$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(0 - 0,\ 0 - 0,\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) = (0, 0, 1 - (-1)) = (0, 0, 2).$$

Die z-Komponente des Curl ist somit 2.

(d) Zeigen Sie die Eigenschaft

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A),$$

für eine beliebige kurvenlose Mittelwertlinie C von $\mathbf{r}_A$ nach $\mathbf{r}_B$. Für $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{r}_A = (0, 0)$, $\mathbf{r}_B = (1, 1)$ gilt

$$\phi(\mathbf{r}_A) = 0, \quad \phi(\mathbf{r}_B) = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Beispielpfad, z. B. Gerade: $\mathbf{r}(t) = (t, t)$ mit $t \in [0, 1]$; dann $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}'(t)\, dt = (1, 1)\, dt$ und

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 (\nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t))\, dt = \int_0^1 (2t\ ,\ 2t) \cdot (1, 1)\, dt = \int_0^1 4t\, dt = 2.$$

Damit gilt die geforderte Gleichung.