Probeklausur

Grundlagen der Elektrotechnik (GLET)

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Grundlagen der Elektrotechnik (GLET)
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Gegeben sei eine Punktladung $q = 1\,\mathrm{nC}$ im Ursprung. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in Abhängigkeit von der Position $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

(b) Zeigen Sie die Potentialfunktion für die Punktladung:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}, \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

(c) Gegeben seien zwei Punktladungen

$$q_1 = +2\,\mathrm{nC} \quad \text{am Ursprung}, \qquad q_2 = -1\,\mathrm{nC} \quad \text{bei } (0, 0, 0.2\,\mathrm{m}).$$

Bestimmen Sie die Potentialhöhe am Punkt $P = (0, 0, 0.1\,\mathrm{m})$. Verwenden Sie

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right), \quad r_i = \|\mathbf{P} - \mathbf{r}_i\|\,.$$

(d) Ein Plattenkondensator mit Plattenfläche A und Abstand d besitzt eine Kapazität

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Die emittierte Feldstärke im Innern ist

$$E = \frac{V}{d}.$$

Geben Sie die Energie des Feldes bei Anlegen einer Grundspannung V an:

$$U = \tfrac{1}{2} C V^2.$$

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei die Anordnung: R1 = 2 Ω und R2 = 3 Ω parallel, welche in Serie mit R3 = 4 Ω geschaltet ist. Bestimmen Sie den gesamten Ersatzwiderstand R_{eq} der Schaltung.

(b) Es gilt ein Netz mit einer Spannungsquelle $U = 12\,\text{V}$ sowie drei Widerständen: $R_1 = 4\,\Omega$ zwischen Knoten A und B, $R_2 = 6\,\Omega$ zwischen Knoten B und Referenz, $R_3 = 3\,\Omega$ zwischen Knoten A und Referenz. Die Spannungsquelle ist ideal zwischen dem Referenzknoten und Knoten A verschaltet. Bestimmen Sie die Ströme i_1 durch R_1, i_2 durch R_2 und i_3 durch R_3 mittels Knotenanalyse.

(c) Bestimmen Sie die Leistung in R_1 sowie die Gesamtleistung der Spannungsquelle.

Aufgabe 3.

(a) Eine lange ideale Spule mit Windungszahl N, Länge l und Strom I erzeugt das Feld

$$B = \mu_0 \, n \, I, \quad n = \frac{N}{l},$$

in der Spule. Geben Sie den Zusammenhang für das magnetische Feld in der Spule an.

(b) Ein homogener zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss durch eine Schleife der Fläche A ändert sich mit der Zeit $\frac{d\Phi_B}{dt}$. Zeigen Sie das Induktionsgesetz

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = BA\cos\theta.$$

(c) Die Energie einer Induktivität mit Induktivität L ist

$$W = \tfrac{1}{2}LI^2.$$

Geben Sie L in Abhängigkeit von Geometrie und Wicklungszahlen an und erläutern Sie die Abhängigkeit der gespeicherten Energie von I.

Aufgabe 4.

(a) Gegeben sind Vektoren

$$\mathbf{a} = (2,\, 3,\, 1)^T, \quad \mathbf{b} = (1,\, 0,\, -1)^T.$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ sowie die Norm $\|\mathbf{a}\|$.

(b) Die Projektion von $\mathbf{c} = (4,\, -1,\, 2)^T$ auf $\mathbf{a}$ lautet

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{c} \;=\; \left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right) \mathbf{a}.$$

Berechnen Sie diese Projektion explizit.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums von $\mathbb{R}^3$, der durch die Gleichung

$$x + 2y + 3z = 0$$

beschrieben wird, und geben Sie eine konkrete Basis an.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Elektrisches Feld einer Punktladung
Für eine Punktladung q am Ursprung gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\mathbf{r}}{r^3}, \qquad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Mit $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8.9875517923 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$ lässt sich schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\,q\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} = k\,q\,\frac{(x,y,z)^T}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Für eine konkrete Position gilt insbesondere

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{k|q|}{r^2}, \quad \text{Richtung: von der Ladung weg bei } q > 0.$$

(b) Potentialfunktion einer Punktladung
Die Potentialfunktion eines Punktladung q erfüllt $\mathbf{E} = -\nabla V$. Mit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k\,\frac{q}{r}, \qquad r = \|\mathbf{r}\|,$$

gilt

$$\nabla V = -k\,q\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V.$$

(c) Potenzialhöhe zweier Punktladungen
Gegeben

$$q_1 = +2\,\mathrm{nC}, \quad q_2 = -1\,\mathrm{nC}, \quad \mathbf{r}_1 = (0,0,0), \quad \mathbf{r}_2 = (0,0,0.2\,\mathrm{m}),$$

und $P = (0,0,0.1\,\mathrm{m})$. Die Abstände zu P sind

$$r_1 = \|\mathbf{P} - \mathbf{r}_1\| = 0.1\,\mathrm{m}, \qquad r_2 = \|\mathbf{P} - \mathbf{r}_2\| = 0.1\,\mathrm{m}.$$

Somit

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = k\,\left(\frac{2\,\mathrm{nC}}{0.1\,\mathrm{m}} - \frac{1\,\mathrm{nC}}{0.1\,\mathrm{m}}\right) = k\,\frac{1\times 10^{-9}}{0.1} = k\,10^{-8}.$$

Numerisch

$$V(P) \approx (8.9875517923 \times 10^9) \times 10^{-8}\ \mathrm{V} \approx 89.9\ \mathrm{V}.$$

(d) Energie eines Plattenkondensators
Gegeben ist $C = \varepsilon_0\,\dfrac{A}{d}$ und $E = \dfrac{V}{d}$. Die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\frac{A}{d}\,V^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,A\,\frac{V^2}{d}.$$

Alternative Herleitung über die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 Ad = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, A\, \frac{V^2}{d}.$$

Aufgabe 2.

(a) Gesamt-Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung in Serie mit R3
R1 und R2 parallel:

$$R_{\parallel} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(2\,\Omega)(3\,\Omega)}{2\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{6}{5}\ \Omega = 1.2\,\Omega.$$

In Serie mit R3:

$$R_{\text{eq}} = R_{\parallel} + R_3 = 1.2\,\Omega + 4\,\Omega = 5.2\,\Omega.$$

(b) Knotanalyse für Netz mit $U = 12\,\mathrm{V}$
Gegeben: $R_1 = 4\,\Omega$ zwischen A und B, $R_2 = 6\,\Omega$ zwischen B und Referenz, $R_3 = 3\,\Omega$ zwischen A und Referenz. Die Spannungsquelle liegt ideal zwischen Referenz und A; somit

$$V_A = U = 12\ \text{V}.$$

Knotengleichung am Knoten B (kein Externer Strompfad außer über R1, R2):

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B - 0}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_B - 12}{4} + \frac{V_B}{6} = 0.$$

Lösen:

$$3(V_B - 12) + 2V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 5V_B = 36 \Rightarrow V_B = 7.2\ \text{V}.$$

Ströme (Richtung wie oben beschrieben):

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} = \frac{12 - 7.2}{4} = 1.2\ \text{A}, \qquad i_2 = \frac{V_B - 0}{R_2} = \frac{7.2}{6} = 1.2\ \text{A}, \qquad i_3 = \frac{V_A - 0}{R_3} = \frac{12}{3} = 4.0\ \text{A}.$$

(c) Leistung in R_1 und Gesamtleistung der Quelle
Leistung in R_1:

$$P_1 = i_1^2 R_1 = (1.2)^2 \cdot 4 = 5.76\ \text{W}.$$

Gesamtleistung der Quelle:

$$I_{\text{Quelle}} = i_1 + i_3 = 1.2 + 4 = 5.2\ \text{A}, \qquad P_{\text{tot}} = U\, I_{\text{Quelle}} = 12 \times 5.2 = 62.4\ \text{W}.$$

Aufgabe 3.

(a) Spulenfeld
Für eine lange Spule mit Windungszahl N, Länge l und Strom I gilt

$$n = \frac{N}{l}, \qquad B = \mu_0\, n\, I = \mu_0\, \frac{N}{l}\, I.$$

Das Feld B ist innerhalb der Spule annähernd homogen (im Innern) und verläuft senkrecht zur Spulenachse; außerhalb der Spule nimmt es ab (für eine ideale lange Spule vernachlässigbar).

(b) Induktionsgesetz
Das Induktionsgesetz lautet

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \Phi_B = BA\cos\theta.$$

Für konstanter Ausrichtung (θ konstant) und konstanter Fläche A ergibt sich

$$\mathcal{E} = -A\cos\theta\,\frac{dB}{dt}.$$

Im Spezialfall senkrechter Feldausrichtung ($\theta = 0$) gilt $\mathcal{E} = -A\,\dfrac{dB}{dt}$.

(c) Energie einer Induktivität
Die Energie

$$W = \tfrac{1}{2}LI^2.$$

Für eine Spule ist die Induktivität (bei idealem Kerns) typischerweise

$$L = \mu_0\,\mu_r\,\frac{N^2 A}{l},$$

mit Kernpermeabilität μ_r (bei Luft 1). Die gespeicherte Energie skaliert wie I^2; bei konstantem L wächst sie quadratisch mit dem Strom. Veränderungen von Geometrie oder Wicklungszahl beeinflussen L und damit auch die Energieaufnahme oder -abgabe.

Aufgabe 4.

(a) Geometrische Größen
Gegeben $\mathbf{a} = (2,3,1)^T$, $\mathbf{b} = (1,0,-1)^T$.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 2 - 1 = 1, \qquad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}.$$

(b) Projektion von $\mathbf{c}$ auf $\mathbf{a}$
Gegeben $\mathbf{c} = (4,-1,2)^T$. Die Projektion

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a}.]Berechnung: \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 = 8-3+2 = 7, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 14, \quad \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Also

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{c} = \frac{1}{2}\,\mathbf{a} = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T.$$

(c) Dimension des Unterraums von $\mathbb{R}^3$
Die Gleichung $x + 2y + 3z = 0$ beschreibt eine Ebene durch den Ursprung; daher ist die Dimension des Unterraums 2.
Eine konkrete Basis (zwei linear unabhängige Vektoren, die die Gleichung erfüllen) z. B.

$$\mathbf{v}_1 = (-2,\ 1,\ 0)^T, \qquad \mathbf{v}_2 = (-3,\ 0,\ 1)^T,$$

denen gilt $(-2) + (2)(1) + 3(0) = 0$ und $(-3) + (2)(0) + 3(1) = 0$. Jede Lösung der Gleichung lässt sich eindeutig als Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ schreiben.