Probeklausur

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

für die Funktion $f(t) = e^{-3t}$ mit $t \geq 0$. Geben Sie das Ergebnis an.

(b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) + 2\,x(t) = e^{-t}, \qquad x(0) = 0,$$

mithilfe der Laplace-Transformation. Formulieren Sie die Gleichung im Transformationsraum und geben Sie die Lösung $x(t)$ an.

(c) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) = e^{-|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Transformierte $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ an.

Aufgabe 2.

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-\alpha|x\rho|}$ mit $\alpha > 0$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}\{f\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Geben Sie das Ergebnis in geschlossener Form an.

(b) Lösen Sie die eindimensionale Wärmegleichung

$$u_t = \kappa\, u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \delta(x)$ (Delta-Funktion). Verwenden Sie die Fourier-Transformation und geben Sie die Lösung als Funktion $u(x, t)$ an.

(c) Seien f und g wohl definiert mit bekannten Fourier-Transformierten $F(k)$ und $G(k)$. Definieren Sie $h = f * g$ als Faltungsprodukt

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte von h gleich dem Produkt $F(k)\, G(k)$ ist.

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die eindimensionale Welle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit den anfänglichen Bedingungen

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Stellen Sie eine Darstellung von $u(x,t)$ unter Verwendung der Fourier-Transformation dar. Formulieren Sie die Lösung intern in Form von Transformierten von f und g.

(b) Setzen Sie für die Diffusionsgleichung

$$u_t = \kappa\, u_{xx}, \quad t > 0,\ x > 0,$$

die Laplace-Transformation in t an und geben Sie die Gleichung für $\tilde{U}(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}(s)$ an (mit Randbedingung $u(0,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$).

(c) Betrachten Sie die Poisson-Gleichung in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

mit Randbedingung $u(0,y) = h(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die Fourier-Transformation in y und leiten Sie eine Lösung in Form eines Integraquellen-Darstellungsvorschlags her.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,$$

mit der Randbedingung $u(0, y) = h(y)$ und der Abbruchbedingung $u(x, y) \to 0$ für $x \to \infty$. Verwenden Sie die Fourier-Transformation in y und geben Sie eine Darstellung von u in Abhängigkeit von der Transformierten von h an.

(b) Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformationsformel

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\}(t),$$

und geben Sie eine passende Interpretation im Kontext von Transformationsmethoden; es genügt die Lösung in geschlossener Form.

(c) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen f und g das Produkt der Transformierten ist, wobei die Faltung definiert ist durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau.$$

Geben Sie dazu eine kurze Begründung an.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Lösung: Die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

für $f(t) = e^{-3t}$ ergibt

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\, dt = \frac{1}{s+3}, \qquad \Re(s) > -3.$$

(b) Lösung: Anfangswertaufgabe

$$x'(t) + 2\,x(t) = e^{-t}, \qquad x(0) = 0.$$

Sei $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$. Aus

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = sX(s) - x(0), \quad \mathcal{L}\{2x\}(s) = 2X(s), \quad \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = \frac{1}{s+1}$$

folgt

$$(s+2)X(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Partieller Zerlegung:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Mit der Inverse Laplace transforms erhält man

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \qquad t \geq 0.$$

(c) Lösung der Fourier-Transformation: Für $f(t) = e^{-|t|}$ gilt

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt + \int_0^\infty e^{-t} e^{i\omega t}\, dt.$$

Es folgt

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Aufgabe 2.

(a) Lösung: Die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$ ist

$$\mathcal{F}\{f\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\alpha - ik} + \frac{1}{\alpha + ik} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2}.$$

(b) Lösung: Wärmegleichung

$$u_t = \kappa\, u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = \delta(x).$$

Mit der Fourier-Transformation in x erhält man

$$\widehat{u}_t = -\kappa k^2 \widehat{u}, \qquad \widehat{u}(k,0) = 1.$$

Daraus folgt

$$\widehat{u}(k,t) = e^{-\kappa k^2 t}.$$

Durch Invertieren erhält man die Fundamentallösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\kappa k^2 t}\, dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}, \qquad t > 0.$$

(c) Lösung: Definiere $h(t) = (f * g)(t)$ mit $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$ und seien $F(k) = \mathcal{F}\{f\}(k)$, $G(k) = \mathcal{F}\{g\}(k)$. Dann gilt

$$\mathcal{F}\{h\}(k) = \mathcal{F}\{f * g\}(k) = F(k)\, G(k).$$

Aufgabe 3.

(a) Lösung: Welle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit $u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$. Für die Fourier-Transformierung in x ($\hat{}$ sei FT in x) erhalten wir

$$\hat{u}_{tt} + c^2 k^2 \hat{u} = 0, \qquad \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k), \quad \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k).$$

Es folgt

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(c|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{c|k|}\sin(c|k|t),$$

und somit

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{f}(k)\cos(c|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{c|k|}\sin(c|k|t)\right] e^{ikx}\, dk.$$

Hinweis: Die Darstellung entspricht der Transformationsdarstellung der Lösung; sie führt auch auf die D'Alembert-Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$

(b) Lösung: Laplace-Transformierte in t. Für $u_t = \kappa u_{xx}$ mit $t > 0,\ x > 0$, Randbedingung $u(0,t) = 0$ und Anfangswandlung $u(x,0) = f(x)$ gilt

$$\mathcal{L}\{u_t\}(s) = s\,\tilde{U}(x,s) - u(x,0) = s\,\tilde{U} - f(x), \qquad \mathcal{L}\{u_{xx}\}(s) = \tilde{U}_{xx}(x,s).$$

Daraus folgt

$$\kappa\,\tilde{U}_{xx}(x,s) - s\,\tilde{U}(x,s) = -f(x),$$

mit Randbedingung $\tilde{U}(0,s) = 0$ und geeigneter Abbruchbedingung $\tilde{U}(x,s)$ für $x \to \infty$.

(c) Lösung: Poisson-Gleichung in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

mit Randbedingung $u(0,y) = h(y)$. Verwende die Fourier-Transformation in y: $\widehat{u}(x,k) = \int u(x,y)e^{-iky}\, dy$. Dann

$$\widehat{u}_{xx} - k^2\widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}(0,k) = \widehat{h}(k).$$

Die Lösung ist $\widehat{u}(x,k) = \widehat{h}(k)e^{-|k|x}$ (bandiertheit für $x > 0$ gewählt). Durch Invertieren erhält man die Integraldarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(k)\, e^{iky}\, e^{-|k|x}\, dk = \big(h * P_x\big)(y),$$

mit der Poisson-Kerneldarstellung

$$P_x(y) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 4.

(a) Lösung: Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,$$

mit Randbedingung $u(0, y) = h(y)$ und Abbruchbedingung $u(x, y) \to 0$ für $x \to \infty$. Anwendung der Fourier-Transformation in y ergibt

$$\widehat{u}_{xx} - k^2 \widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}(0, k) = \widehat{h}(k),$$

und die Lösung ist

$$\widehat{u}(x, k) = \widehat{h}(k)\, e^{-|k|x}.$$

Rücktransformation liefert

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(k)\, e^{iky}\, e^{-|k|x}\, dk = \big(P_x * h\big)(y), \quad P_x(y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(b) Lösung: Inverse Laplace-Transformationsformel

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} (t) = \cos(at), \qquad t \geq 0.$$

Interpretation: Die Funktion $\cos(at)$ ist die Inverse-Laplace-Bild der Quotienten $s/(s^2 + a^2)$; diese Paare bilden typische Transformationspaare.

(c) Lösung: Fourier-Transformierte der Faltung Zeigen Sie wie zuvor, dass

$$\mathcal{F}\{f * g\}(k) = F(k)\, G(k),$$

was sich direkt aus der Definition der Transformations- und Faltungsoperation sowie der Fubini-Theorie ergibt.