Probeklausur

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transform von $f(t) = e^{-2t}u(t)$, wobei $u(\cdot)$ die Sprungfunktion ist.

(b) Bestimmen Sie die Inverse-Fourier-Transformation zu einer gegebenen Transformierten $F(\omega)$ und interpretieren Sie das zeitliche Verhalten der resultierenden Funktion.

(c) Formulieren Sie das Parseval-Gesetz für die Fourier-Transformation und erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen es gilt.

(d) Lösen Sie die eindimensionale Wärmegleichung

$$\partial_t u(x,t) \; = \; \kappa \, \partial_{xx} u(x,t), \qquad u(x,0) = f(x)$$

mittels Fourier-Transformation in der räumlichen Variablen x. Geben Sie die Lösung in Form eines Faltungsintegrals an.

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transform von $g(t) = t^2 e^{-3t} u(t)$.

(b) Lösen Sie die lineare Differentialgleichung

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 5\,y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

mithilfe der Laplace-Transformation.

(c) Interpretieren Sie die zeitliche Entwicklung der Lösung und diskutieren Sie die Stabilität des Systems.

Aufgabe 3.

(a) Lösen Sie die eindimensionale wellenartige PDE

$$\partial_{tt}u(x,t) \;=\; c^2\,\partial_{xx}u(x,t),$$

mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen durch Transformationsmethoden in der Raumvariablen x.

(b) Formulieren Sie die Lösung in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und erläutern Sie den Physikbezug.

(c) Zeigen Sie, wie Zusammenhänge zwischen Fourier- bzw. Laplace-Transformationen und der wellenartigen PDE genutzt werden können, um die Lösung zu beschreiben.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\partial_{xx}u(x,y) \; + \; \partial_{yy}u(x,y) \; = \; 0$$

in der halben Ebene $y > 0$ mit der Randbedingung $u(x,0) = f(x)$ durch Anwendung der Fourier-Transformation in x. Geben Sie die transformierte Gleichung und deren Lösung in der Form $U(k,y) = F(k)e^{-|k|y}$ an und rekonstruieren Sie gegebenenfalls u.

(b) Gegeben sei $f(x) = \sin x$. Bestimmen Sie $u(x,y)$ für $y > 0$ und liefern Sie eine explizite Darstellung.

(c) Diskutieren Sie Konvergenz- und Randverhalten von u beim Grenzwert $y \to 0^+$ bzw. $y \to \infty$.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Lösen Sie die Fourier-Transform von $f(t) = e^{-2t}u(t)$, wobei $u(\cdot)$ die Sprungfunktion ist.

Lösung. Die Fourier-Transformationsdefinition lautet

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Da $f(t) = e^{-2t}u(t)$ nur für $t \geq 0 \, ungleichnullist, gilt F(\omega) = \int_0^\infty e^{-(2+i\omega)t}\, dt = \left[-\frac{1}{2+i\omega}\, e^{-(2+i\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2+i\omega}$.Alternativ:

$$F(\omega) = \frac{1}{2+i\omega} = \frac{2-i\omega}{4+\omega^2}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse-Fourier-Transformation zu einer gegebenen Transformierten $F(\omega)$ und interpretieren Sie das zeitliche Verhalten der resultierenden Funktion.

Hinweis/Lösungsskizze. Die inverse Fourier-Transformation lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Im Allgemeinen enthält diese Formel alle zeitabhängigen Anteile, die durch das Spektrum $F(\omega)$ beschrieben werden. Die konkrete Form von $f(t)$ hängt daher stark von der konkreten Wahl von $F(\omega)$ ab. Allgemeine Interpretationen: - Wenn $F(\omega)$ real und gerade ist, dann ist $f(t)$ eine reelle, gerade bzw. symmetrisch aufgebaute Funktion. - Die Breite des Spektrums von F bestimmt die zeitliche Ausbreitung bzw. Glättung von $f(t)$. - Ggf. kann man $f(t)$ auch als Superposition von Sinus-/Kosinus-Komponenten interpretieren.

(c) Formulieren Sie das Parseval-Gesetz für die Fourier-Transformation und erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen es gilt.

Lösung. Unter der Standard-Konvention

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

gilt das Parseval-Gesetz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

Voraussetzungen: - $f \in L^2(\mathbb{R})$ (quadratisch integrierbar) und $F \in L^2(\mathbb{R})$ bzw. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ bzw. $F \in L^2(\mathbb{R})$, sodass die Transformationspaare existieren (Plancherel-Theorem). - Unter diesen Bedingungen gilt die Gleichung exakt; sie lässt sich durch Approximationsargumente auch auf weitergehende Klassen extrapolieren.

(d) Lösen Sie die eindimensionale Wärmegleichung

$$\partial_t u(x,t) \;=\; \kappa\,\partial_{xx} u(x,t), \qquad u(x,0) = f(x)$$

mittels Fourier-Transformation in der räumlichen Variablen x. Geben Sie die Lösung in Form eines Faltungsintegrals an.

Lösung. Wende die Fourier-Transformation in x an:

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ikx}\, dx,$$

dann gilt nach Patchung der PDE:

$$\partial_t \hat{u}(k,t) = -\kappa k^2 \hat{u}(k,t), \quad \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k).$$

Für jedes k folgt

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\, e^{-\kappa k^2 t}.$$

Damit

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, e^{-\kappa k^2 t}\, dk.$$

Die Antwort kann auch als Faltungsform geschrieben werden:

$$u(x,t) = (f * G_t)(x), \qquad G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, \exp\!\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right),$$

d.h.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, \exp\!\left(-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}\right)\, dy.$$

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transform von $g(t) = t^2 e^{-3t} u(t)$.

Lösung. Mit der Laplace-Transformationsdefinition

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt,$$

und der bekannten Formel

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at} u(t)\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \Re(s) > \Re(a),$$

erhält man hier

$$G(s) = \frac{2}{(s+3)^3}, \qquad \Re(s) > -3.$$

(b) Lösen Sie die lineare Differentialgleichung

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 5\,y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

mithilfe der Laplace-Transformation.

Lösung. Setze $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Dann

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1, \quad \mathcal{L}\{4y'\} = 4(sY(s) - y(0)) = 4sY(s),$$

$$\mathcal{L}\{5y\} = 5Y(s), \quad \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}.$$

Die Transformierte erfüllt somit

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) - 1 = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)\big((s+2)^2+1\big)}.$$

Durch die partielle Zerlegung

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+2)^2+1},$$

und der bekannten Inversen

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+1}\Big\} = e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\Big\} = e^{-2t}\cos t, \quad \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\Big\} = e^{-2t}\sin t,$$

erhält man

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\Big(e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t\Big).$$

Interpretation. Die Lösung besteht aus einem abklingenden Termsatz: - der Term $\frac{1}{2}e^{-t}$ als Reaktion auf die Anregung e^{-t}, - plus Abklingmoden $e^{-2t}\cos t$ und $e^{-2t}\sin t$, deren Frequenz durch die Hausdorff-Resonanz (Wurzeln der charakteristischen Gleichung $r^2 + 4r + 5 = 0$) bestimmt wird. Die Membran-/Systemantwort ist damit stabil und geht gegen Null, während sich eine mitgetragene Verschiebung aufgrund der Anregung einstellt.

(c) Interpretieren Sie die zeitliche Entwicklung der Lösung und diskutieren Sie die Stabilität des Systems.

Interpretation. - Die Homogen-Lösung besitzt die charakteristischen Werte $r = -2 \pm i$; diese deuten auf gedämpfte Schwingungen mit der Grundfrequenz $\omega = 1$ und Dämpfung e^{-2t} hin. - Die Anregung e^{-t} trägt zu einem weiteren abklingenden Term bei. - Insgesamt ist das System stabil, d. h. $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$, unabhängig von den Anfangsbedingungen (hier $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$).

Aufgabe 3.

(a) Lösen Sie die eindimensionale wellenartige PDE

$$\partial_{tt}u(x,t) \;=\; c^2\,\partial_{xx}u(x,t),$$

mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen durch Transformationsmethoden in der Raumvariablen x.

Lösung. Führe die Fourier-Transformation in x durch:

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-ikx}\,dx.$$

Dann gilt

$$\hat{u}_{tt}(k,t) = -c^2k^2\hat{u}(k,t),$$

womit $\hat{u}(k,t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{u}(k,t) + c^2k^2\hat{u}(k,t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$ und $\partial_t\hat{u}(k,0) = \hat{g}(k)$ löst.

Die Lösung lautet

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(c|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{c|k|}\sin(c|k|t), \quad (k \neq 0),$$

und im Grenzfall $k \to 0$ entspricht $\hat{u}(k,t)$ dem entsprechenden Limes. Die Lösung in Ortsraum erhält man durch Invertieren:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(k)\cos(c|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{c|k|}\sin(c|k|t)\right]e^{ikx}\,dk.$$

Eine äquivalente, sehr gebräuchliche Form ist die d'Alembert-Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi,$$

die sich durch die Verwendung der Fourier- bzw. der Laplace-Transformationsmethoden herleiten lässt und die Physik der ungestörten Ausbreitung von Wellen widerspiegelt.

(b) Formulieren Sie die Lösung in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und erläutern Sie den Physikbezug.

Lösung. Siehe oben: Die Lösung hängt linear von den Anfangsdaten $f(x) = u(x,0)$ und $g(x) = \partial_t u(x,0)$ ab. Die Wellenfronten breiten sich mit Geschwindigkeit c aus; die Form $\frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct))$ zeigt die Doppel-Treffer-Propagation, während die Integralterm die anfängliche Geschwindigkeit verbreitet.

(c) Zeigen Sie, wie Zusammenhänge zwischen Fourier- bzw. Laplace-Transformationen und der wellenartigen PDE genutzt werden können, um die Lösung zu beschreiben.

Hinweis. - Mit der Fourier-Transformation in x verwandelt die PDE in einen ODE-Index k, $\hat{u}_{tt} + c^2k^2\hat{u} = 0$. Die Lösung dieser ODE liefert direkt die Modalentwicklung des Wellenfeldes.
- Die inverse Transformation führt die Lösung in Form einer Superposition von Harmonischen e^{ikx} mit Frequenzen ck her, was der physikalischen Interpretation entspricht: Jeder Modus mit Wellenzahl k schwingt mit Frequenz $c|k|$ und trägt zur Gesamtantwort bei.

Aufgabe 4.

(a) Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\partial_{xx}u(x,y) \; + \; \partial_{yy}u(x,y) \; = \; 0$$

in der halben Ebene $y > 0$ mit der Randbedingung $u(x,0) = f(x)$ durch Anwendung der Fourier-Transformation in x. Geben Sie die transformierte Gleichung und deren Lösung in der Form $U(k,y) = F(k)e^{-|k|y}$ an und rekonstruieren Sie gegebenenfalls u.

Lösung. Fourier-Transform in x (mit $F(k) = \mathcal{F}\{f\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$):

$$\hat{u}_{yy} - k^2\hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(k,y) = A(k)e^{|k|y} + B(k)e^{-|k|y}.$$

Für $y > 0$ ist die Laplace-Lösung quadratisch beschränkt (Stabilität/Bedingungen im Unendlichen), daher $A(k) = 0$. Unter der Randbedingung $\hat{u}(k,0) = F(k)$ folgt

$$U(k,y) = \hat{u}(k,y) = F(k)\, e^{-|k|y}.$$

Rekonstruktion:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, e^{-|k|y}\, dk.$$

(b) Gegeben sei $f(x) = \sin x$. Bestimmen Sie $u(x,y)$ für $y > 0$ und liefern Sie eine explizite Darstellung.

Lösung. Zuerst Bestimmung von $F(k)$:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, e^{-ikx}\, dx = i\pi\,\big[\delta(k+1) - \delta(k-1)\big].$$

Setze in die Repräsentation ein:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, e^{-|k|y}\, dk = \frac{i}{2}\big[e^{-iy}e^{-ix} - e^{-iy}e^{ix}\big] = \; e^{-y}\sin x.$$

Somit gilt

$$u(x,y) = e^{-y}\sin x \quad (y > 0).$$

(c) Diskutieren Sie Konvergenz- und Randverhalten von u beim Grenzwert $y \to 0^+$ bzw. $y \to \infty$.

Lösung. - Grenzwert $y \to 0^+$: Aus der Transformationsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, e^{-|k|y}\, dk \quad \Longrightarrow \quad u(x,0) = f(x),$$

unter geeigneten Regularitätsannahmen (z. B. $f \in L^1(\mathbb{R})$ oder $L^2(\mathbb{R})$); also konvergiert $u(x,y)\} \to f(x)$ in geeigneter Sinnweise (punktsweise unter Regularität, oder im L^2-Sinne).

- Grenzwert $y \to \infty$: Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int F(k)\, e^{ikx}\, e^{-|k|y}\, dk \xrightarrow[y\to\infty]{} 0,$$

weil alle Frequenzkomponenten außer dem Frequenzanteil $k = 0$ exponentiell abklingen; bei allgemeinen f mit endemischer Mittelwert-Beschaffenheit gilt zudem, dass der Beitrag mit Frequenz $k = 0$ separat behandelt wird und unter typischen Randbedingungen ebenfalls gegen Null geht (Poisson-Kern-Argument).