

Probeklausur

Mechanik E

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mechanik E

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

- (a) Ein einfach unterstützter Balken der Länge $L = 6 \text{ m}$ trägt eine konzentrierte Last $P = 12 \text{ kN}$ in der Entfernung $a = 2 \text{ m}$ von der linken Stütze. Bestimmen Sie die Stützreaktionen R_A und R_B .
- (b) Bestimmen Sie den Biegelinienverlauf $M(x)$ und den Querkraftverlauf $V(x)$ des Balkens. Schreiben Sie die Formeln jeweils für die Bereiche $0 \leq x < a$ und $a \leq x \leq L$ getrennt auf.
- (c) Bestimmen Sie den Momentenwert am Ort $x = 4 \text{ m}$.
- (d) Gegeben zusätzlich eine gleichmäßig verteilte Last $q_0 = 4 \text{ kN/m}$ im Abschnitt von $x = 4 \text{ m}$ bis $x = 6 \text{ m}$. Bestimmen Sie die neuen Stützreaktionen.

Aufgabe 2.

- (a) Ein Block mit Masse $M = 6 \text{ kg}$ liegt auf einer glatten Ebene. Ein Seil verbindet ihn über eine reibungsfreie Rolle mit einer weiteren Masse $m = 2 \text{ kg}$, die senkrecht darüber hängt. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems und die Seilspannung.
- (b) Schreiben Sie die Gleichungen der Bewegung auf und kennzeichnen Sie die zugehörigen Größen.
- (c) Lösen Sie nach der Beschleunigung a und der Spannung T auf und geben Sie Ausdrücke an.
- (d) Diskutieren Sie, wie sich das Ergebnis verändert, falls Reibung am Tisch oder am Seil berücksichtigt wird.

Aufgabe 3.

- (a) Ein cantileverartig eingespannten Balken der Länge L trägt am freien Ende eine senkrechte Kraft P . Verwenden Sie die Grundform der Euler-Bernoulli-Theorie, um die Endverformung δ zu bestimmen.
- (b) Bestimmen Sie die maximale Biegespannung $\sigma_{\max}$ im Balken. Es gilt $\sigma = M c/I$ mit dem maximalen Moment $M_{\max} = PL$ und dem halben Breitenabstand c des rechteckigen Querschnitts.
- (c) Gegeben seien $L = 2\text{ m}$, ein rechteckiger Querschnitt mit Breite $b = 0.04\text{ m}$, Höhe $h = 0.08\text{ m}$, Elastizitätsmodul $E = 210\text{ GPa}$ und Kraft $P = 1000\text{ N}$. Berechnen Sie numerisch δ und $\sigma_{\max}$.
- (d) Skizzieren Sie qualitativ die Verformungskurve und kommentieren Sie die Richtung der Verformung.

Aufgabe 4.

- (a) Ein Fachwerk besteht aus den Knoten $A(0,0)$, $B(L,0)$ und $C(0,H)$. Die tragenden Elemente sind AB, AC und BC. Eine vertikale Last P wirkt am Knoten B. Zeichnen Sie das Fachwerk und formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen an Knoten A.
- (b) Bestimmen Sie die Stützreaktionen an Knoten A unter der gegebenen Last.
- (c) Bestimmen Sie die Normalkräfte in den Mitgliedern AB, AC und BC mittels der Schnittpunktmethode (Methode der Schnittgrößen).
- (d) Diskutieren Sie, welche weiteren Informationen nötig wären, um das Tragwerk vollständig zu bewerten.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Ein einfach unterstützter Balken der Länge $L = 6 \text{ m}$ trägt eine konzentrierte Last $P = 12 \text{ kN}$ in der Entfernung $a = 2 \text{ m}$ von der linken Stütze. Die Stützreaktionen R_A (links) und R_B (rechts) werden durch statische Gleichgewichte bestimmt.

Lösung: Es gilt die Gleichgewichtsbedingung hinsichtlich der Momente um Punkt A:

$$R_B L - P a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{P a}{L} = \frac{12 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 4 \text{ kN}.$$

Die Restlast wird durch die Stützreaktion links aufgenommen:

$$R_A = P - R_B = 12 \text{ kN} - 4 \text{ kN} = 8 \text{ kN}.$$

(b) Bestimmen Sie den Biegelinienverlauf $M(x)$ und den Querkraftverlauf $V(x)$ des Balkens. Schreiben Sie die Formeln jeweils für die Bereiche $0 \leq x < a$ und $a \leq x \leq L$ getrennt auf.

Lösung: Mit der Stützbemerkung (rechnen mit links als Ursprung) gilt:

- Querkraftverlauf

$$V(x) = \begin{cases} R_A = 8 \text{ kN}, & 0 \leq x < a, \\ R_A - P = 8 - 12 = -4 \text{ kN}, & a \leq x \leq L. \end{cases}$$

- Biegelinienverlauf

$$M(x) = \begin{cases} R_A x = 8x, & 0 \leq x < a, \\ R_A x - P(x - a) = 8x - 12(x - 2) = -4x + 24, & a \leq x \leq L. \end{cases}$$

Hinweise: Der Momentenwechsel bei $x = a$ ergibt sich aus der angreifenden Last. Der maximale Moment liegt im Bereich $0 \leq x < a$ bzw. am Übergang; hier ist $M_{\max} = M(a) = 8a = 16 \text{ kN m}$.

(c) Bestimmen Sie den Momentenwert am Ort $x = 4 \text{ m}$.

Lösung: Da $4 \text{ m} \geq a = 2 \text{ m}$ gilt der Bereich $a \leq x \leq L$. Demnach

$$M(4) = -4 \cdot 4 + 24 = 8 \text{ kN m}.$$

(d) Gegeben zusätzlich eine gleichmäßig verteilte Last $q_0 = 4 \text{ kN/m}$ im Abschnitt von $x = 4 \text{ m}$ bis $x = 6 \text{ m}$. Bestimmen Sie die neuen Stützreaktionen.

Lösung: Die zusätzliche Last besteht aus einer Punktlast $P = 12 \text{ kN}$ sowie einer verteilten Last q_0 über 2 m . Die Gesamtlast ist

$$W = q_0 \cdot (6 - 4) = 4 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} = 8 \text{ kN}.$$

Die resultierenden Momente um A ergeben sich aus den Stützreaktionen:

$$R'_B \cdot L = P a + W x_W,$$

wobei x_W der Schwerpunkt der verteilten Last über dem Balken ist, also $x_W = 5$ m.

Daraus folgt

$$R'_B = \frac{P a + W x_W}{L} = \frac{12 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \text{ kN} \approx 10.67 \text{ kN}.$$

Der Rest wird am linken Stützpunkt aufgenommen (Gesamtlast)

$$P_{\text{tot}} = P + W = 12 + 8 = 20 \text{ kN},$$

und damit

$$R'_A = P_{\text{tot}} - R'_B = 20 - \frac{32}{3} = \frac{28}{3} \text{ kN} \approx 9.33 \text{ kN}.$$

Zusammenfassung Aufgabe 1:

$$R_A = 8 \text{ kN}, \quad R_B = 4 \text{ kN}, \quad V(x) = \begin{cases} 8 \text{ kN}, & 0 \leq x < 2 \\ -4 \text{ kN}, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases}, \quad M(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \leq x < 2 \\ -4x + 24, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases},$$

$$M(4) = 8 \text{ kN m}.$$

Nach Einführung von q_0 im Abschnitt $4 \leq x \leq 6$:

$$R'_A = \frac{28}{3} \text{ kN}, \quad R'_B = \frac{32}{3} \text{ kN} \quad (\approx 9.33 \text{ kN}, 10.67 \text{ kN}).$$

Aufgabe 2.

- (a) Ein Block mit Masse $M = 6 \text{ kg}$ liegt auf einer glatten Ebene. Ein Seil verbindet ihn über eine reibungsfreie Rolle mit einer weiteren Masse $m = 2 \text{ kg}$, die senkrecht darüber hängt. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems und die Seilspannung.
- (b) Schreiben Sie die Gleichungen der Bewegung auf und kennzeichnen Sie die zugehörigen Größen.
- (c) Lösen Sie nach der Beschleunigung a und der Spannung T auf und geben Sie Ausdrücke an.
- (d) Diskutieren Sie, wie sich das Ergebnis verändert, falls Reibung am Tisch oder am Seil berücksichtigt wird.

Lösung:

(a) und (b) Das System besteht aus zwei Massen, einer horizontal bewegten Masse M und einer nach unten hängenden Masse m , verbunden durch ein massenloses Seil über eine reibungslose Rolle. Wir wählen positive Richtung nach rechts für M und nach unten für m . Die Beschleunigung des Systems sei a (in der genannten Richtung).

(c) Gleichungen der Bewegung (mit der gängigen Annahme, dass der Seilzug identisch ist und die Beschleunigungen gleich groß sind):

$$T = Ma, \quad mg - T = ma.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$a = \frac{mg}{M + m}, \quad T = M a = \frac{Mmg}{M + m}.$$

Numerisch ($g=9.81 \text{ m/s}^2$):

$$a = \frac{2 \cdot 9.81}{6 + 2} = \frac{19.62}{8} \approx 2.45 \text{ m/s}^2, \quad T = 6 \cdot a \approx 6 \cdot 2.45 \approx 14.7 \text{ N}.$$

(d) Diskussion Reibung: Wird Reibung am Tisch (Klemmung) oder am Seil berücksichtigt, ändert sich das Gleichungssystem zu

$$T - f = Ma \quad (\text{am Tisch}), \quad mg - T = ma, \quad \text{mit } f = \mu_k Mg \text{ oder } f = \mu_k N.$$

Es folgt

$$a = \frac{mg - f}{M + m} = g \frac{m - \mu_k M}{M + m},$$

wobei das Vorzeichen der Reibung von der Bewegungsrichtung abhängt. Falls der Reibungsbeiwert μ_k so groß wird, dass $\mu_k M \geq m$, würde die Bewegung stoppen oder umkehren (je nach Vorzeichen und Reibungsmodell). Zusätzlich könnte auch Reibung im Seil (Rollwiderstand) oder im Seilweg auftreten, wodurch T nicht mehr durch einfache Gleichungen gegeben ist.

Aufgabe 3.

(a) Ein cantileverartig eingespannten Balken der Länge L trägt am freien Ende eine senkrechte Kraft P . Verwenden Sie die Grundform der Euler-Bernoulli-Theorie, um die Endverformung δ zu bestimmen.

Lösung: Für ein eingespanntes Balkenende mit Endlast P gilt die Endverformung

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI},$$

mit dem Trägheitsmoment I und dem Elastizitätsmodul E .

(b) Bestimmen Sie die maximale Biegespannung $\sigma_{\max}$ im Balken. Es gilt $\sigma = M c/I$ mit dem maximalen Moment $M_{\max} = PL$ und dem halben Breitenabstand c des rechteckigen Querschnitts.

Lösung: Der Moment am festen Ende ist $M_{\max} = PL$. Für einen Rechteckquerschnitt ($b \times h$) gilt

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad c = \frac{h}{2},$$

also

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{PL(h/2)}{(bh^3/12)} = \frac{6PL}{bh^2}.$$

(c) Gegeben seien $L = 2$ m, ein rechteckiger Querschnitt mit Breite $b = 0.04$ m, Höhe $h = 0.08$ m, Elastizitätsmodul $E = 210$ GPa und Kraft $P = 1000$ N. Berechnen Sie numerisch δ und $\sigma_{\max}$.

Lösung: Zunächst berechnen wir die Größen:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.04 \cdot (0.08)^3}{12} = \frac{0.04 \cdot 0.000512}{12} \approx 1.7067 \times 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$c = \frac{h}{2} = 0.04 \text{ m}, \quad E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad L = 2 \text{ m}.$$

Endverformung:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{1000 \cdot 8}{3 \cdot 210 \times 10^9 \cdot 1.7067 \times 10^{-6}} \approx \text{Numerisch klein (ca. } 0.0079 \text{ m oder weniger, je nach genauen$$

Biegespannung:

$$M_{\max} = PL = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ N m}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{2000 \cdot 0.04}{1.7067 \times 10^{-6}} \approx 4.69 \times 10^7 \text{ Pa} \approx 47 \text{ MPa}.$$

(d) Skizzieren Sie qualitativ die Verformungskurve und kommentieren Sie die Richtung der Verformung.

Lösung: Die Verformungskurve eines eingespannten Balkens mit Vertikallast am freien Ende steigt monoton an; die maximale Verformung tritt am freien Ende auf und ist nach unten gerichtet (fallende Krümmung). Die Biegung ergibt eine konvexe Krümmung, die Richtung der Verformung entspricht der Richtung der angewandten Kraft.

Aufgabe 4.

(a) Ein Fachwerk besteht aus den Knoten A(0,0), B(L,0) und C(0,H). Die tragenden Elemente sind AB, AC und BC. Eine vertikale Last P wirkt am Knoten B. Zeichnen Sie das Fachwerk und formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen an Knoten A.

Lösung: Es handelt sich um ein Dreiecksfundament mit drei two-force-members (AB, AC, BC). An Knoten A wirken die Axialkräfte aus AB und AC sowie die Stützreaktionen am Knoten A (falls vorhanden). Sei $-F_{AB}$ die axiale Kraft im AB (positiv = Zug), $-F_{AC}$ die axiale Kraft im AC (positiv = Zug), $-F_{BC}$ die axiale Kraft im BC (positiv = Zug), $-(R_{Ax}, R_{Ay})$ die Stützreaktionen am Knoten A.

Gleichgewichtsgleichungen an Knoten A (zunächst als Formeln, ohne weitere Annahmen):

$$\text{Summe } F_x \text{ an A: } F_{AB} + R_{Ax} = 0, \quad \text{Summe } F_y \text{ an A: } F_{AC} + R_{Ay} = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Stützreaktionen an Knoten A unter der gegebenen Last.

Lösung (Hinweis): Ohne Angabe der Art der Stützung an A (und ohne Angabe einer weiteren Stütze) ist das Tragwerk weder eindeutig lösbar noch eindeutig bestimmbar. Um die Stützreaktionen an A zu bestimmen, benötigt man mindestens eine weitere Stütze bzw. Informationen über die Art der Verbindung (Pin, Rolle, feste Verankerung) an den anderen Knoten oder zusätzliche Gleichgewichtsbedingungen des gesamten Tragwerks. Daher kann hier keine eindeutige numerische Lösung angegeben werden. Eine mögliche Vorgehensweise ist: - Wähle eine Stützbedingung am zweiten Unterstützungsort (z. B. eine Rolle an C oder B) und formuliere globales Gleichgewicht (Summen von Kräften in x/y und das Gesamtmomentum). - Verwende anschließend die Schnittgrößenmethode, um die Normalkräfte in AB, AC und BC zu bestimmen.

(c) Bestimmen Sie die Normalkräfte in den Mitgliedern AB, AC und BC mittels der Schnittpunktmethode (Methode der Schnittgrößen).

Lösung (Hinweis): Unter der Annahme einer konkreten Stütze-Topologie (z. B. Pin an A und Rolle an C) würden die Kräfte in den drei Mitgliedern durch die Gleichgewichte an Knoten A, B und C bestimmt werden. Die Richtung der Kräfte folgt aus der gegebenen Geometrie: - AB liegt horizontal von A nach B, somit wirkt die Komponente von F_{AB} in der x-Richtung. - AC liegt vertikal von A nach C, somit wirkt die Komponente von F_{AC} in der y-Richtung. - BC verläuft von B zu C mit Richtungsvektor $(-L, H)$ und der zugehörige Anteil von F_{BC} hat Komponenten $F_{BC} \left(-\frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}}, \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} \right)$.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten (und ggf. weiteren Stütze) erhält man lineare Gleichungssysteme, deren Lösung die drei Unbekannten F_{AB} , F_{AC} , F_{BC} liefert. Ohne konkrete Stützbedingungen bleiben diese Werte symbolisch und abhängig von der gewählten Stützlage.

(d) Diskutieren Sie, welche weiteren Informationen nötig wären, um das Tragwerk vollständig zu bewerten.

Lösung: Um das Tragwerk vollständig zu bewerten, benötigt man: - die Art der Stützungen

(z. B. Pin an A, Rolle an C) und deren Lage, - die gegebenen Koordinaten L und H (bzw. die Länge der Seiten) sowie die Richtung des externen Lastvektors (hier eine vertikale Last am Knoten B), - Informationen darüber, ob das Fachwerk aus zwei- oder dreidimensionalen (oder weitere) Stäben besteht und ob alle Stäbe als zwei-Feder-Stäbe modelliert werden. - Material- und Querschnittsdaten wären ebenfalls nötig, falls auch die Innenkräfte quantitativ mit Schnittebenen-Methoden (z. B. Plastizitäts- oder Sicherheitsnachweise) bewertet werden sollen.