

Probeklausur

Mechanik E

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Mechanik E
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erstellungsdatum: September 20, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Mechanik E

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

- (a) Ein einfach gestützter Balken der Länge $L = 6\text{ m}$ besitzt zwei Punktlasten $P_1 = 20\text{ kN}$ an der Stelle $x_1 = 2\text{ m}$ und $P_2 = 10\text{ kN}$ an der Stelle $x_2 = 5\text{ m}$ (beide nach unten wirkend). Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen R_A und R_B in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.
- (b) Leiten Sie den Biegemomentsverlauf $M(x)$ des Balkens ($0 \leq x \leq 6\text{ m}$) her, wobei Sie die Stücke zwischen den Lasten getrennt betrachten. Bestimmen Sie M an der Stelle $x = 4\text{ m}$ sowie die Lage des Maximums von $M(x)$.
- (c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Größen die Stelle, an der das Biegemoment maximal ist, und geben Sie den maximalen Wert von M in Form von Ausdrücken an.

Aufgabe 2.

(a) Eine stählerne Stabstange der Länge $L = 2\text{ m}$ und Masse $m = 6\text{ kg}$ ist über einen festen Lagerpunkt A am linken Ende gelagert und horizontal ausgerichtet. Am freien Ende B wirkt eine konstante vertikale Kraft $F = 40\text{ N}$ nach unten. Der Träger hat den Rotationsinertie eines Stabes um das Lagerende

$$I = \frac{1}{3}mL^2.$$

Bestimmen Sie den Winkelbeschleunigungswert α des Stabes.

(b) Der Stab wird aus dem Ruhezustand freigegeben und der Drehwinkelbeschleuniger bleibt konstant (α aus Teil (a)). Berechnen Sie nach $t = 0.5\text{ s}$ die Winkelgeschwindigkeit ω .

(c) Bestimmen Sie die so genannte Rotationskinetische Energie des Stabes nach $t = 0.5\text{ s}$.

(d) Geben Sie den Drehwinkel θ nach $t = 0.5\text{ s}$ an (Ausgangspunkt ist $\theta(0) = 0$).

Aufgabe 3.

(a) Ein Umlaufträger in Form eines eindimensionalen Balkens der Länge $L = 3\text{ m}$ ist als Balken mit einer festen Verankerung am linken Ende A festgelegt. Ein gleichmäßig verteilte Lastwertfluss $w = 4\text{ kN/m}$ wirkt entlang der Hydrauliklänge. Bestimmen Sie das Moment am festen Endpunkt A (Maximales Momentverhalten) sowie die Querschnittslastverteilung.

(b) Bestimmen Sie das maximale Biegemoment $M_{\max}$ des Balkens und geben Sie an, an welcher Position es auftritt (im Zusammenhang mit der Verteilung der Last).

(c) Gegeben sei ein rechteckiger Querquerschnitt mit Breite $b = 0.2\text{ m}$ und Höhe $h = 0.3\text{ m}$. Das Material hat ein elastisches E-Modul von $E = 210\text{ GPa}$. Berechnen Sie die maximale Biegespannung $\sigma_{\max}$ am unteren bzw. oberen Rand des Balkens, der stärksten Biegebeanspruchung.

(d) Bestimmen Sie die Durchbiegung am freien Ende des Balkens, wenn der Balken durch die verteilte Last aus (a) beansprucht wird. Verwenden Sie die Vereinfachung der Durchbiegungsgleichung $\delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI}$ mit dem Trägheitsmoment $I = \frac{bh^3}{12}$.

Aufgabe 4.

(a) Ein Massenpunkt der Masse $m = 4 \text{ kg}$ bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 1 \text{ m}$ um das Zentrum O . Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ sei gegeben durch

$$\omega(t) = 2t \quad (\text{rad/s}), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Die Winkelbeschleunigung ist $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = 2 \text{ rad/s}^2$. Bestimmen Sie die Position des Punktes zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ in kartesischen Koordinaten (x, y) mit dem Zentrum bei der Koordinatenursprung.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y des Massenpunkts zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ in kartesischen Koordinaten.

(c) Bestimmen Sie die Beschleunigungskomponenten a_x und a_y des Massenpunkts zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ in kartesischen Koordinaten. Geben Sie auch die analytische Form der Radial- und Transversalbeschleunigungen an und berechnen Sie deren Werte zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$.

(d) Geben Sie die Geschwindigkeitsgeschwindigkeit und die Orientierung des Geschwindigkeitsvektors zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ an und bestimmen Sie die Betragsgeschwindigkeit $|\mathbf{v}|$.

Lösungen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen R_A und R_B eines einfach gestützten Balkens der Länge $L = 6$ m mit zwei Punktlasten $P_1 = 20$ kN an der Stelle $x_1 = 2$ m und $P_2 = 10$ kN an der Stelle $x_2 = 5$ m (beide nach unten wirkend).

Lösung: Es gilt die Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung

$$R_A + R_B = P_1 + P_2 = 30 \text{ kN.}$$

Es sei negativ gekennzeichnet, dass unten wirkt. Die Stützreaktion R_B erhält man aus dem Momentengleichgewicht um Auflager A ($L = 6$ m):

$$R_B L = P_1 x_1 + P_2 x_2 = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 = 40 + 50 = 90 \text{ kN m,}$$

$$R_B = \frac{90}{6} = 15 \text{ kN,} \quad R_A = 30 - 15 = 15 \text{ kN.}$$

$R_A = 15 \text{ kN,} \quad R_B = 15 \text{ kN.}$

(b) Leiten Sie den Biegemomentsverlauf $M(x)$ des Balkens ($0 \leq x \leq L$) her, wobei Sie die Stücke zwischen den Lasten getrennt betrachten.

Lösung: Die Momentenverläufe in den Segmenten ergeben sich aus der Summe der Auflagerreaktionen und der Wirkungen der Lasten bis zum betrachteten Schnitt.

- Für $0 \leq x \leq x_1 = 2$ m:

$$M(x) = R_A x = 15x.$$

- Für $2 \leq x \leq 5$ m:

$$M(x) = R_A x - P_1(x - x_1) = 15x - 20(x - 2) = -5x + 40.$$

- Für $5 \leq x \leq 6$ m:

$$M(x) = R_A x - P_1(x - x_1) - P_2(x - x_2) = 15x - 20(x - 2) - 10(x - 5) = -15x + 90.$$

Auswertungen: - Am Übergangspunkt $x = 2$ m: $M(2) = 30$ kN m (Kontinuität zu $M(x < 2)$). - Bei $x = 4$ m (Zwischenbereich 2–5 m):

$$M(4) = 15 \cdot 4 - 20(4 - 2) = 60 - 40 = 20 \text{ kN m.}$$

Maximales Moment: Die Steigung in 0–2 m ist positiv (+15), in 2–5 m negativ (−5); somit nimmt $M(x)$ bis $x = 2$ zu und danach ab. Daher liegt das maximale Moment bei $x = 2$ m mit

$$M_{\max} = M(2) = 30 \text{ kN m.}$$

$M_{\max} = 30 \text{ kN m bei } x = 2 \text{ m.}$

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Größen die Stelle, an der das Biegemoment maximal ist, und geben Sie den maximalen Wert von M in Form von Ausdrücken an.

Lösung (allgemein): Es seien

$$R_A = \frac{P_1(L - x_1) + P_2(L - x_2)}{L}, \quad R_B = \frac{P_1x_1 + P_2x_2}{L},$$

mit $0 < x_1 < a < x_2 < L$ und L die Balkenlänge. Die Momentengleichungen in den Segmenten liefern die Steigungen

$$s_1 = R_A, \quad s_2 = R_A - P_1, \quad s_3 = R_A - P_1 - P_2.$$

- Falls $s_1 > 0$ und $s_2 \leq 0$ gilt, wächst $M(x)$ bis $x = a$ und erreicht dort das Maximum

$$M_{\max} = M(a) = R_A a.$$

- Falls $s_2 > 0$ und $s_3 \leq 0$ gilt, wächst $M(x)$ bis $x = b$ und erreicht dort das Maximum

$$M_{\max} = M(b) = R_A b - P_1(b - a).$$

- Für die gegebene Konstellation ($R_A = 15 \text{ kN}$, $P_1 = 20 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$, $P_2 = 10 \text{ kN}$, $b = 5 \text{ m}$) gilt $s_2 = R_A - P_1 = -5 < 0$ und das Maximum liegt bei $x = a$ mit

$$M_{\max} = R_A a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ kNm}.$$

(d) Gegeben sei ein rechteckiger Querschnitt mit Breite $b = 0.2 \text{ m}$ und Höhe $h = 0.3 \text{ m}$. Das Material hat ein elastisches E-Modul von $E = 210 \text{ GPa}$. Berechnen Sie die maximale Biegespannung $\sigma_{\max}$ am unteren bzw. oberen Rand des Balkens (stärkste Biegebeanspruchung).

Lösung: Trägheitsmoment des Querschnitts

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.2 \cdot (0.3)^3}{12} = 0.00045 \text{ m}^4.$$

Die maximale Momentenamplitude beträgt $M_{\max} = 18 \text{ kNm} = 1.8 \times 10^4 \text{ Nm}$ bzw. Magnitude 18 kNm . Der Abstand zur Neutrallinie-Höhe ist

$$y_{\max} = \frac{h}{2} = 0.15 \text{ m}.$$

Daraus folgt die maximale Biegespannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I} = \frac{1.8 \times 10^4 \cdot 0.15}{0.00045} \approx 6.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 6 \text{ MPa}.$$

(e) Bestimmen Sie die Durchbiegung am freien Ende des Balkens, wenn der Balken durch die verteilte Last aus (a) beansprucht wird. Verwenden Sie die Vereinfachung der Durchbiegungsgleichung

$$\delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} \quad \text{mit } I = \frac{bh^3}{12}.$$

Lösung: Für $w = 4 \text{ kN/m} = 4000 \text{ N/m}$, $L = 3 \text{ m}$,

$$I = \frac{0.2 \cdot (0.3)^3}{12} = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$\delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{4,000 \cdot 3^4}{8 \cdot 210 \times 10^9 \cdot 4.5 \times 10^{-4}} = \frac{324,000}{7.56 \times 10^8} \approx 4.29 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

$$\delta_{\max} \approx 0.43 \text{ mm.}$$

Aufgabe 2.

(a) Eine stählerne Stabstange der Länge $L = 2 \text{ m}$ und Masse $m = 6 \text{ kg}$ ist über einen festen Lagerpunkt A am linken Ende gelagert und horizontal ausgerichtet. Am freien Ende B wirkt eine konstante vertikale Kraft $F = 40 \text{ N}$ nach unten. Der Träger hat den Rotationsinhalt eines Stabes um das Lagerende

$$I = \frac{1}{3}mL^2.$$

Bestimmen Sie den Winkelbeschleunigungswert α des Stabes.

Lösung: Es wirkt ein Drehmoment zum Drehpunkt A aus zwei Beiträgen: - von der äußeren Kraft: $\tau_F = FL = 40 \times 2 = 80 \text{ N m}$, - von der Schwerkraft des Stabes: $\tau_g = mg\frac{L}{2} = 6 \cdot 9.81 \cdot 1 = 58.86 \text{ N m}$.

Gesamtmoment:

$$\tau = \tau_F + \tau_g = 80 + 58.86 = 138.86 \text{ N m.}$$

Trägheitsmoment

$$I = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8 \text{ kg m}^2.$$

Damit

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{138.86}{8} \approx 17.36 \text{ rad s}^{-2}.$$

$$\alpha \approx 17.36 \text{ rad s}^{-2}.$$

(b) Der Stab wird aus dem Ruhezustand freigegeben und der Drehwinkelbeschleuniger bleibt konstant (α aus Teil (a)). Berechnen Sie nach $t = 0.5 \text{ s}$ die Winkelgeschwindigkeit ω .

Lösung:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \quad \omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(0.5) = \alpha \cdot 0.5 \approx 8.68 \text{ rad s}^{-1}.$$

$$\omega(0.5 \text{ s}) \approx 8.68 \text{ rad s}^{-1}.$$

(c) Bestimmen Sie die so genannte Rotationskinetische Energie des Stabes nach $t = 0.5 \text{ s}$.

Lösung:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8.68)^2 \approx 3.02 \times 10^2 \text{ J.}$$

$$K_{\text{rot}} \approx 301 \text{ J.}$$

(d) Geben Sie den Drehwinkel θ nach $t = 0.5 \text{ s}$ an (Ausgangspunkt ist $\theta(0) = 0$).

Lösung:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

$$\theta(0.5) = \frac{1}{2}\alpha(0.5)^2 = \frac{1}{2} \cdot 17.36 \cdot 0.25 \approx 2.17 \text{ rad.}$$

$$\theta(0.5 \text{ s}) \approx 2.17 \text{ rad } (\approx 124.3^\circ).$$

Aufgabe 3.

(a) Ein Umlaufträger in Form eines eindimensionalen Balkens der Länge $L = 3 \text{ m}$ ist als Balken mit einer festen Verankerung am linken Ende A festgelegt. Ein gleichmäßig verteilter Lastwertfluss $w = 4 \text{ kN/m}$ wirkt entlang der Hydrauliklänge. Bestimmen Sie das Moment am festen Endpunkt A (maximales Momentverhalten) sowie die Querschnittslastverteilung.

Lösung: Für einen einseitig festgehaltenen Balken mit gleichmäßig verteilter Last gilt das Moment am festen Endpunkt

$$M_A = -\frac{wL^2}{2}.$$

Mit $w = 4 \text{ kN/m}$ und $L = 3 \text{ m}$ ergibt sich

$$M_A = -\frac{4 \cdot 3^2}{2} \text{ kN m} = -18 \text{ kN m}.$$

Die Momentenverteilung innerhalb des Balkens (für $0 \leq x \leq L$) ist

$$M(x) = -\frac{wx^2}{2},$$

d.h. eine hogging-Verteilung mit maximalem Betrag am festen Endpunkt ($|M_A| = 18 \text{ kN m}$).

Querschnittslastverteilung: Der Lastfluss wirkt entsprechend der UDL-Verteilung w und ist linear mit dem Querschnittsabschnitt identisch verteilt; die Biegemomente ergeben sich aus der obigen Gleichung $M(x) = -\frac{wx^2}{2}$.

(b) Bestimmen Sie das maximale Biegemoment $M_{\max}$ des Balkens und geben Sie an, an welcher Position es auftritt (im Zusammenhang mit der Verteilung der Last).

Lösung: Die maximale Momentstärke liegt am festen Endpunkt A (Position $x = 0$ bzw. am Balkenansatz) mit

$$M_{\max} = |M_A| = \frac{wL^2}{2} = 18 \text{ kN m}.$$

(c) Gegeben sei ein rechteckiger Querquerschnitt mit Breite $b = 0.2 \text{ m}$ und Höhe $h = 0.3 \text{ m}$. Das Material hat ein elastisches E-Modul von $E = 210 \text{ GPa}$. Berechnen Sie die maximale Biegespannung $\sigma_{\max}$ am unteren bzw. oberen Rand des Balkens, der stärksten Biegebeanspruchung.

Lösung: Trägheitsmoment

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.2 \cdot (0.3)^3}{12} = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Wandlung von $M_{\max}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max} y_{\max}}{I}, \quad y_{\max} = \frac{h}{2} = 0.15 \text{ m}, \\ \sigma_{\max} &= \frac{18,000 \cdot 0.15}{4.5 \times 10^{-4}} = 6.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 6 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie die Durchbiegung am freien Ende des Balkens, wenn der Balken durch die verteilte Last aus (a) beansprucht wird. Verwenden Sie die Vereinfachung der Durchbiegungsgleichung

$$\delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} \quad \text{mit } I = \frac{bh^3}{12}.$$

Lösung: Mit $w = 4 \text{ kN/m} = 4000 \text{ N/m}$, $L = 3 \text{ m}$, $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ und $I = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$:

$$\delta_{\max} = \frac{4000 \cdot 3^4}{8 \cdot 210 \times 10^9 \cdot 4.5 \times 10^{-4}} = \frac{324,000}{7.56 \times 10^8} \approx 4.29 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

$\delta_{\max} \approx 0.43 \text{ mm}.$

Aufgabe 4.

(a) Ein Umlaufträger in Form eines eindimensionalen Balkens der Länge $L = 1 \text{ m}$ rotiert um das Zentrum O . Die Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega(t) = 2t \quad (\text{rad/s}), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Die Winkelbeschleunigung ist $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = 2 \text{ rad/s}^2$. Bestimmen Sie die Position des Punktes zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ in kartesischen Koordinaten (x, y) mit dem Zentrum O als Ursprung.

Lösung: Aus dem Anfangswinkel sei $\theta(0) = 0$. Dann

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \int_0^t 2\tau d\tau = t^2,$$

also zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$

$$\theta(1) = 1 \text{ rad}.$$

Die Position ist dann

$$x = R \cos \theta = \cos 1 \approx 0.5403 \text{ m}, \quad y = R \sin \theta = \sin 1 \approx 0.8415 \text{ m},$$

mit $R = 1 \text{ m}$.

$(x, y) \approx (0.5403, 0.8415) \text{ m}.$

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y des Massenpunkts zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ in kartesischen Koordinaten.

Lösung: Die Geschwindigkeit ist ein gerichteter Vektor entlang der Bahntangente:

$$v_x = -R\omega \sin \theta, \quad v_y = R\omega \cos \theta.$$

Mit $R = 1 \text{ m}$, $\omega(1) = 2 \text{ rad/s}$, $\theta(1) = 1 \text{ rad}$ ergibt sich

$$v_x = -2 \sin 1 \approx -1.6829 \text{ m/s}, \quad v_y = 2 \cos 1 \approx 1.0806 \text{ m/s}.$$

$(v_x, v_y) \approx (-1.6829, 1.0806) \text{ m/s}.$

(c) Bestimmen Sie die Beschleunigungskomponenten a_x und a_y des Massenpunkts zum Zeitpunkt $t = 1$ s in kartesischen Koordinaten. Geben Sie auch die analytische Form der Radial- und Transversalbeschleunigungen an und berechnen Sie deren Werte zum Zeitpunkt $t = 1$ s.

Lösung: Allgemein gilt

$$a_x = -R\omega^2 \cos \theta - R\alpha \sin \theta, \quad a_y = -R\omega^2 \sin \theta + R\alpha \cos \theta.$$

Mit $R = 1$ m, $\omega(1) = 2$ rad/s, $\alpha(1) = 2$ rad/s², $\theta(1) = 1$ rad erhält man

$$a_x = -4 \cos 1 - 2 \sin 1 \approx -3.8442 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = -4 \sin 1 + 2 \cos 1 \approx -2.2853 \text{ m/s}^2.$$

Radial- und Transversalbeschleunigungen: - Radial (Zentripetal): $a_r = \omega^2 R = 4$ m/s² in Richtung zum Zentrum (entlang $-(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})$). - Transversal: $a_t = \alpha R = 2$ m/s² in Richtung der zunehmenden Winkelposition (entlang $-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$).

Damit

$$\mathbf{a} = a_r (-\hat{\mathbf{r}}) + a_t \hat{\boldsymbol{\tau}} = (-4 \cos \theta - 2 \sin \theta) \hat{\mathbf{i}} + (-4 \sin \theta + 2 \cos \theta) \hat{\mathbf{j}},$$

und numerisch wie oben

$$\mathbf{a} \approx (-3.8442, -2.2853) \text{ m/s}^2.$$

(d) Geben Sie die Geschwindigkeit und die Orientierung des Geschwindigkeitsvektors zum Zeitpunkt $t = 1$ s an und bestimmen Sie die Betragsgeschwindigkeit $|\mathbf{v}|$.

Lösung: Betragsgeschwindigkeit

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.6829)^2 + (1.0806)^2} \approx 2.0 \text{ m/s},$$

da $|\mathbf{v}| = R\omega = 1 \cdot 2 = 2$ m/s.

Orientierung des Geschwindigkeitvektors:

$$\phi = \text{atan2}(v_y, v_x) \approx \text{atan2}(1.0806, -1.6829) \approx 2.57 \text{ rad } (\approx 147.3^\circ).$$

$|\mathbf{v}| \approx 2.00 \text{ m/s}, \quad \text{Richtung } \phi \approx 2.57 \text{ rad.}$