Lernzettel

Analysis III für Ingenieure

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Analysis III für Ingenieure

(1) Grundbegriffe der komplexen Analysis.
Die komplexe Analysis behandelt Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Holomorphie und Abbildungen in der Ebene. Eine Funktion f heißt holomorph in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in D$ differenzierbar ist:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

wobei der Grenzwert unabhängig von der Richtung des Annäherungswegs existiert. Äquivalent gilt die Cauchy-Riemann-Bedingung: Falls $f = u + iv$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Holomorphie impliziert Lokalkonvergenz durch Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in einigen Umgebungen von } z_0.$$

(2) Komplexe Integration.
Sei γ eine glatte Kurve im $\mathbb{C}$ und f eine holomorphe Funktion auf einer Region, die γ enthält. Das Kurvenintegral ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Wichtige Formeln:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \quad \text{und} \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Der Residuensatz folgt aus der Laurent-Reihe und besagt, dass

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k),$$

wobei die Summe über die innerhalb von γ liegenden isolierten Singularitäten geht.

(3) Analytische Funktionen und Reihen.
Eine holomorphe Funktion besitzt in einer geeigneten Umgebung eine Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Bei isolierten Singularitäten erhält man eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wichtige Eigenschaften: - Maximum-Modulus-Prinzip: In einer beschränkten Gebietskonstruktion ist der Betrag von f am Rand maximal. - Isolierte Singularitäten: Ordnung und Residuen definieren.

(4) Singularitäten und der Residuensatz.
Eine isolierte Singularität z_0 von f ist z. B. ein Pol; die Ordnung des Pols gibt an, wie stark sich f verhält. Für eine einfache Polstelle gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

und allgemeiner

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right],$$

falls die Ordnung m des Pols bekannt ist. Der Residuensatz ermöglicht die Auswertung von Integralen und liefert Verbindungen zu Reihenentwicklungen.

(5) Harmonische Funktionen und Zusammenhang zur komplexen Analysis.
Ist f holomorph und $f = u + iv$, dann erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-Gleichungen und sind harmonisch:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

Damit ergibt sich eine enge Verbindung zwischen analytischen Funktionen und harmonischen Funktionen auf der Ebene.

(6) Dynamische Systeme und Stabilität (Infinitesimale Analyse).
Betrachte ein automnes System

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_*) = 0,$$

mit stationärem Zustand x_*. Linearisierung um x_* liefert

$$\dot{y} = Jf(x_*)\, y, \quad Jf(x_*) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_*}.$$

- Ist alle Eigenwerte von $Jf(x_*)$ haben negative Realteile, ist der Zustand asymptotisch stabil. - Enthält der Realteil eines Eigenwertes eine positive Zahl, so ist der Zustand instabil. - Bei eigenwerten mit Realteil Null ist meist eine tiefergehende Analyse nötig (z. B. Lyapunov-Theorie).

(7) Randwert- und Eigenwert-Aufgaben in Differentialgleichungen.
Beispiel eines Randwertproblems:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta.$$

Eigenwertproblem (z. B. Sturm-Liouville-Form):

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Typische Ergebnisse: - Es existieren eine abzählbare Menge von Eigenwerten $\{\lambda_n\}$. - zu jedem λ_n gehört eine Eigenfunktion y_n, deren Reihenentwicklungen oft genutzt werden (Ordnungs- und Orthogonalitätsbeziehungen).

(8) Anwendungen und Hinweise für Ingenieure.
- Transformierte Methoden (Fourier, Laplace) nutzen komplexe Analysis, um Differentialgleichungen zu lösen. - Residuenkalkül erleichtert Auswertung von Integralen in der Systemanalyse und

Regelungstechnik. - Harmonische Funktionen liefern Potential- und Strömungsinterpretationen in Randgebieten physikalischer Modelle.

Beispielhafte Übungsstruktur (zum Üben): - Bestimmen Sie die Residuen der Funktion

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)},$$

und werten Sie ein geeignetes Randintegral aus. - Untersuchen Sie die Stabilität eines linearen Systems $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und entscheiden Sie über Stabilität. - Lösen Sie das Randwertproblem y”+ y=0 mit den Randbedingungen y(0)=0, y(L)=0 und geben Sie die Eigenwerte sowie Eigenfunktionen an.