Lernzettel

Dynamische Systeme: Fixed Points, Stabilität, Linearisierung, lokale Stabilität

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Dynamische Systeme

(1) Grundbegriffe. Ein dynamisches System beschreibt die Entwicklung eines Zustandsvektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit der Zeit. Es gibt diskrete Systeme

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

und kontinuierliche Systeme

$$\dot{x} = f(x), \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Ein p heißt Fixed Point (äquivalenter Gleichgewichtspunkt), wenn

$$\text{diskret: } f(p) = p, \qquad \text{kontinuierlich: } f(p) = 0.$$

(2) Linearisierung. Um das Verhalten nahe eines festen Punktes zu verstehen, linearisiert man das System um p.
Diskret, $x_{k+1} = f(x_k)$: Sei $A = Df(p)$ die Jacobi-Matrix aus Ableitungen an p. Genähert gilt

$$x_{k+1} - p \approx A\,(x_k - p).$$

Wachsens-/Schrumpfungseigenschaften werden durch $\rho(A)$ bestimmt, die spektrale Radius.

Kontinuierlich, $\dot{x} = f(x)$: Sei $J = Df(p)$ die Jacobi-Matrix an p. Genähert gilt

$$(x \dot{-} p) \approx J\,(x - p).$$

(3) Stabilitätstypen und Kriterien.

- Diskret: Sei $A = Df(p)$. Dann gilt

$$\rho(A) < 1 \quad \Rightarrow \quad p \text{ lokal asymptotisch stabil,}$$

  $\rho(A) > 1 \Rightarrow\ p$ instabil.

Ist $\rho(A) = 1$ oder komplexe Werte, kann die Linearisierung allein nicht entscheiden.

Kontinuierlich: Sei $J = Df(p)$. Ist $\Re\lambda(J) < 0$ für alle Eigenwerte λ von J, p ist lokal asymptotisch stabil. Ist $\exists\lambda : \Re\lambda > 0$, dann ist p instabil. Bei $\Re\lambda = 0$ reicht die Linearisierung nicht aus; weitere Analysis (Center-Manifold) ist nötig.

(4) Lokale Stabilität vs globale Stabilität. - Lokale Stabilität bedeutet Stabilität im Umfeld von p; globale Stabilität erfordert das Verhalten für alle Startpunkte. - Linearisierung liefert oft nur lokale Aussagen.

(5) Beispiel: Diskretes System (1D). Betrachte

$$x_{n+1} = a\,x_n + b, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 1.$$

Fixpunkt: $x^* = \dfrac{b}{1-a}$.

Ableitung: $f'(x) = a$. Stabilität am Fixpunkt

$$|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad x_n \to x^* \text{ für jede } x_0.$$

Beispiel: sei $a = 0.6$, $b = 0.8$. Dann $x^* = \dfrac{0.8}{1 - 0.6} = 2$ und

$$x_{n+1} - x^* = a\,(x_n - x^*) = 0.6\,(x_n - x^*),$$

also konvergiert die Folge gegen 2.

(6) Beispiel: Kontinuierliches System (2D linear). Betrachte das lineare System

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von A sind -1 und -2. Da $\Re\lambda(A) < 0$ gilt, ist der Fixpunkt $x = 0$ lokal asymptotisch stabil.

(7) Nichtlineare Fixpunkte und Linearisierung. Für nichtlineare Systeme $\dot{x} = f(x)$ oder $x_{k+1} = f(x_k)$ liefert die Linearisierung nur Aussagen in der Nähe eines Gleichgewichtspunkts p. Falls die Jacobian-Matrix $J = f'(p)$ eigenwerte mit negativen Realteilen (endlich) besitzt, gilt lokale asymptotische Stabilität; sonst nicht.

(8) Kompaktfassung. - Fixed Points definieren die Gleichgewichte eines Systems.
- Linearisierung liefert das lokale Verhalten durch die Jacobi-Matrix.
- Diskrete Systeme: Stabilität über den spektralen Radius der Ableitung.
- Kontinuierliche Systeme: Stabilität über die Realteile der Eigenwerte der Jacobian-Matrix.
- Lokale Stabilität erfordert oft weitere Analysen, wenn Eigenwerte auf der imaginären Achse liegen.

Hinweis zu Randwert- und Eigenwertproblemen. Die hier behandelten Konzepte der lokalen Stabilität und Linearisierung finden sich wieder in der Behandlung von Randwert- und Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen, wie im Kurs beschrieben.