Lernzettel

Komplexe Dynamik: Iteration, Julia- und Fatou-Sätze, Stabilitätskriterien

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Komplexe Dynamik: Iteration, Julia- und Fatou-Saetze, Stabilitaetskriterien

(1) Grundlagen der Iteration.
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Die n-te Iteration ist definiert als

$$f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ Mal}}.$$

Damit lassen sich Orbits von Startpunkt z_0 untersuchen:

$$z_{n+1} = f(z_n), \qquad z_0 \in \mathbb{C}.$$

(2) Fixpunkte und Stabilitaet.
Ein Punkt p ist Fixpunkt, wenn $f(p) = p$. Der Multiplikator ist

$$\lambda = f'(p).$$

Stabilitaet in der Umgebung von p:

$$|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow \quad p \text{ ist attracting.}$$

$$|\lambda| > 1 \quad \Rightarrow \quad p \text{ ist repelling.}$$

$$|\lambda| = 1 \quad \Rightarrow \quad p \text{ ist neutral; weitere Klassifikation (Siegel- oder Parabolpunkte) notwendig.}$$

(3) Julia- und Fatou-Saetze.
Die Julia-Menge wird definiert als die Menge der Punkte, in deren Umgebung die Familie $\{f^{\circ n}\}$ NICHT normal ist:

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}\} \text{ ist in jeder Umgebung von } z \text{ NICHT normal}\}.$$

Der Fatou-Satz besagt, dass das Komplement der Julia-Menge der Fatou-Bereich ist, in dem die Familie $\{f^{\circ n}\}$ normal ist:

$$F(f) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus J(f),$$

und auf $F(f)$ gilt: $\{f^{\circ n}\}$ ist normal (Montel'scher Satz).

(4) Stabilitaetskriterien in der Dynamik.
- Lokale Linearisation: In der Umgebung eines Fixpunkts p mit $|f'(p)| < 1$ konvergieren fast alle Orbits gegen p.
- Bei $|f'(p)| > 1$ entzieht sich der Orbit dem Fixpunkt; p ist repelling.
- Bei $|f'(p)| = 1$ treten komplexere Phasen auf (z. B. Siegel-Dome, Parabolpunkte); hier ist eine genauere Analyse notwendig.

(5) J(f) und K(f) – Beispiel einer quadratischen Familie.
Betrachte die Quadratik-Familie

$$f_c(z) = z^2 + c, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

- Gefuellte Julia-Menge (K(f$_c$))$istdieMengederPunktemitgebundenerOrbit$: $K(f_c) = \{z \in \mathbb{C} : \{f_c^{\circ n}(z)\}_{n\geq 0}$ bleibt beschraenkt$\}$.- Die Julia-Menge ist der Rand von $K(f_c)$:

$$J(f_c) = \partial K(f_c).$$

- Sonderfall $c = 0$:

$$f_0(z) = z^2, \quad K(f_0) = \{z : |z| \leq 1\}, \quad J(f_0) = \{z : |z| = 1\}.$$

(6) Eigenschaften der Julia- und Fatou-Mengen.
- $J(f)$ ist kompakt, nicht leer und enthält alle repelling-periodischen Punkte.
- $F(f)$ besteht aus den Normalbereichen von $f^{\circ n}$; in jedem vollständig offenen Component von $F(f)$ ist das Verhalten stabil und lokal normal.
- Die Menge $J(f)$ ist der Rand von $K(f)$ und besitzt typischerweise eine chaotische Struktur.

(7) Aufgaben- und Anwendungsbeispiele.
- Bestimme Fixpunkte und Multiplikatoren von $f(z) = z^2 + c$ für gegebenes c und klassifiziere deren Stabilitaet.
- Bestimme die Julia-Menge von $f_0(z) = z^2$ und diskutiere das Verhalten der Orbits innerhalb bzw. außerhalb des Einheitskreises.
- Skizziere grob die Idee des Normalitaetskriteriums von Montel auf dem Fatou-Bereich.