

# Lernzettel

## Differentialgleichungen: Grundlagen, Anfangs- und Randwertprobleme

**Universität:** Technische Universität Berlin  
**Kurs/Modul:** Analysis III für Ingenieure  
**Erstellungsdatum:** September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!  
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Analysis III für Ingenieure

**Lernzettel: Differentialgleichungen: Grundlagen, Anfangs- und Randwertprobleme****(1) Grundlagen.**

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die Ableitungen einer Unbekannten enthält. Sie beschreibt Abhängigkeiten von Größen entlang eines Parameters (z. B. der Variablen  $x$ ).

**(1.1) Ordnung und Typ.**

$$\text{Ordnung } n: \quad y^{(n)}(x) + \dots = g(x, y, \dots)$$

$$\text{Lineare DGL: } a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

**(1.2) Anfangs- und Randwerte.**

$$\text{Anfangsproblem (IVP): } y(x_0) = y_0$$

$$\text{Randwertproblem (BVP): } y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

**(1.3) Lösungskonzepte.**

Eine Lösung ist eine Funktion  $y(x)$ , die die DGL erfüllt und die gegebenen Rand- bzw. Anfangswerte erfüllt.

**(1.4) Linearität und Superposition.**

Bei linearen DGLen gilt: Falls  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen der inhomogenen Gleichung sind, dann ist auch jede Linearkombination  $c_1y_1 + c_2y_2$  nur dann wieder eine Lösung, sofern die Gleichung homogen ist. (Hinweis: Im Allgemeinen gilt das Prinzip der Superposition nur für lineare Gleichungen.)

**(2) Erste Ordnung: Integrationsfaktor.**

Für lineare DGL der Form

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

**Integrationsfaktor.**

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x) dx\right)$$

**Lösungsform.**

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x) q(x) dx + C \right)$$

**(3) Beispiel einer IVP erster Ordnung.**

Gegeben sei

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x}, \quad y(0) = 4.$$

**Lösungsschritte.**

$$y_h(x) = C e^{-2x}$$

$$y_p(x) = A e^{3x} \Rightarrow 3A e^{3x} + 2A e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$y(x) = C e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow C + \frac{1}{5} = 4 \Rightarrow C = \frac{19}{5}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{19}{5} e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}}$$

#### (4) Zweite Ordnung: lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Allgemeine Form:

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = g(x).$$

**Homogene Lösung.**

$$a r^2 + b r + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

**Partikuläre Lösung.**

Für konstante Rechtsseite  $g(x) = K$  gilt bei  $c \neq 0$  oft

$$y_p(x) = \frac{K}{c}$$

(sofern diese Form nicht durch die Homogenität schon erzeugt wird).

**Beispiel.**

$$y'' - 3y' + 2y = 1$$

**Lösungsweg.**

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}$$

#### (5) Randwert- und Eigenwertaufgaben.

Typisches Beispiel auf dem Intervall  $[0, L]$ :

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

**Lösung.**

Allgemeine Lösung hängt von  $\lambda$  ab.

$$\text{Fall } \lambda = \mu^2 > 0: \quad y(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad y(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\mu L) = 0$$

Für nicht-triviale Lösungen muss  $\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi$  mit  $n = 1, 2, \dots$

Daraus folgt

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

### (6) Existenz und Eindeutigkeit (Wesentlicher Satz).

Für die erste Ordnung gilt: Sei  $f(x, y)$  stetig in einem Rechteck  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  und erfülle dort eine Lipschitz-Bedingung in  $y$ ,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \text{ in dem Rechteck.}$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung auf einem Intervalle um  $x_0$ .

### (7) Zusammenfassung.

- Erste Ordnung: Integrationsfaktor und lineare Form.
- Zweite Ordnung: homogene Lösung mittels charakteristischer Gleichung; partikuläre Lösung je nach Rechtsseite.
- Randwert- und Eigenwertprobleme: häufige Form  $y'' + \lambda y = 0$  mit Randbedingungen; diskrete Eigenwerte  $\lambda_n$  und Eigenfunktionen  $y_n$ .

### Hinweis zur Weiterführung.

Für Randwertprobleme mit allgemeinen Randbedingungen und größere Systeme gilt oft die Theorie der Sturm-Liouville-Systeme und numerische Verfahren (z. B. Galerkin-Ansätze, Finite-Differenzen-Verfahren) für approximate Lösungen.