Lernzettel

Randwert- und Eigenwertaufgaben bei linearen ODEs: Sturm-Liouville-Probleme, Eigenfunktionen, Orthogonalität

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Lernzettel: Randwert- und Eigenwertaufgaben bei linearen ODEs: Sturm-Liouville-Probleme, Eigenfunktionen, Orthogonalität

(1) Allgemeine Formulierung.
Eine gängige Randwert- und Eigenwertaufgabe der Sturm-Liouville-Art hat die Form

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda\, w(x)\, y, \quad a < x < b,$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

wobei die Koeffizienten $p(x) > 0$ auf $[a,b]$, $q(x)$ und $w(x) > 0$ real-werte Funktionen sind. Die Randbedingungen sind linear und homogen.

(2) Koeffizienten und Regularität.
Typische Annahmen:

- $p(x)$ stetig und strikt positiv auf $[a,b]$,
- $q(x)$, $w(x)$ sind ebenfalls stetig (bzw. mindestens messbar) und $w(x) > 0$ fast überall.

Die Randbedingungen sind regulär (linear, homogen) und erfüllen Eindeutigkeits- und Stabilitätsanforderungen.

(3) Eigenwerte und Eigenfunktionen.
Unter den obigen Annahmen besitzt das Problem eine diskrete Folge reeller Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ mit zugehörigen, nicht-trivialen Eigenfunktionen $y_n(x)$, die die Randbedingungen erfüllen. Die Eigenfunktionen sind paarweise orthogonal bezüglich des Gewichts $w(x)$:

$$\int_a^b y_m(x)\, y_n(x)\, w(x)\, dx = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

(4) Beispiel: Standard-Sturm-Liouville-Projektionsproblem.
Betrachte

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\, y, \quad 0 < x < L,$$

mit Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Lösungen:

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dazu gilt

$$\int_0^L y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \frac{L}{2}\,\delta_{mn}.$$

(5) Orthogonalität und Reihenentwicklung.
Jede geeignete Funktion f lässt sich aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen in eine Reihe expandieren:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x), \quad c_n = \frac{1}{\int_a^b y_n^2 w(x)\, dx} \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, w(x)\, dx.$$

Diese Expansion ist besonders nützlich für die Lösung von inhomogenen Problemen und für die Approximation von Lösungen durch endliche Teilreihen.

(6) Wichtige Formeln.

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y, \qquad L[y_n] = \lambda_n\, w(x)\, y_n,$$

$$\int_a^b y_m(x)\, y_n(x)\, w(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

(7) Bemerkungen zur Orthogonalität.
- Die Gewichtsfunktion $w(x)$ bestimmt das innere Produkt und die Orthogonalitätsbeziehung.
- Für $m \neq n$ sind die Eigenfunktionen orthogonal zueinander in $\mathcal{L}^2_w[a, b]$.
- Die Menge $\{y_n\}$ bildet eine vollständige Basis von $L^2_w[a, b]$ (Regular- SL-Problem).

(8) Übungsaufgabe (Kurzbeispiel).
Betrachte das Standardproblem

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Bestimme die Eigenwerte λ_n und die zugehörigen Eigenfunktionen. Welche Orthogonalitätsbeziehung gilt? Antwort:

$$\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad \int_0^\pi y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{mn}.$$