

Lernzettel

Grundlagen der komplexen Funktionen:
Analytische Funktionen, Holomorphie und
Cauchy-Riemann

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum:	September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Analysis III für Ingenieure

Lernzettel: Grundlagen der komplexen Funktionen: Analytische Funktionen, Holomorphie und Cauchy-Riemann**(1) Analytische Funktionen und Holomorphie.**

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit offener Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt analytisch an einer Stelle $z_0 \in D$, wenn es eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in U \subseteq D \text{ offen um } z_0)$$

gibt, die in einer Umgebung von z_0 konvergiert und dort mit f übereinstimmt. Eine Funktion heißt holomorph in D , wenn sie in jedem Punkt von D analytisch ist. Im Wesentlichen bedeutet Holomorphie, dass f komplex differenzierbar in einer ganzen Umgebung jedes Punktes von D ist; äquivalent dazu existiert eine komplexe Ableitung $f'(z)$ in jedem Punkt von D .

(2) Cauchy-Riemann-Gleichungen.

Schreibe $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Falls die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y existieren und stetig sind, gilt

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Unter dieser Voraussetzung ist f genau dann holomorph in einer Umgebung von einem Punkt, wenn die Cauchy-Riemann-Gleichungen dort erfüllt sind.

(3) Komplexe Ableitung und Zusammenhang mit CR.

Die komplexe Ableitung am Punkt $z = x + iy$ ist

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = v_y(x, y) - i u_y(x, y),$$

wobei die letzte Gleichung durch CR folgt. Ist CR erfüllt und die partiellen Ableitungen stetig, existiert $f'(z)$ und ist in der Umgebung harmonisch stabil.

(4) Beispiele.

- Holomorph überall: $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $f(z) = e^z, \sin z, \cos z$ – alle ganze Funktionen.
- Allgemein holomorph überall: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit konstanter Potenzreihe.
- Nicht-holomorph (CR scheitert):
 - $f(z) = \bar{z} = x - iy$ mit $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$. Dann $u_x = 1, v_y = -1 \Rightarrow$ CR verletzt.
 - $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ (also $u = x^2 + y^2, v = 0$). Dann $u_x = 2x, v_y = 0 \Rightarrow$ CR verletzt (außer an der Nullstelle).

(5) Lokale Darstellung durch Potenzreihen (Analytizität).

Wenn f holomorph in einer Umgebung von $a \in D$ ist, dann existiert eine Radius- $R > 0$ mit $|z - a| < R$ und eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

die in dieser Umgebung konvergiert und dort f entspricht. Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

(6) Summary und Schlüsse.

- Analytische Funktionen sind lokal durch Potenzreihen darstellbar; Holomorphie bedeutet analytisch in jeder Umgebung eines Punktes.
- Die CR-Gleichungen liefern eine notwendige Bedingung für Holomorphie, ausreichend ist sie zusammen mit Wertebedingungen (stetige partiellen Ableitungen).
- Bekannte ganze Funktionen (z. B. z^n , e^z , $\sin z$, $\cos z$) sind holomorph über ganz $\mathbb{C}$.

(7) Übungsbeispiele (zum Verständnis).

- Prüfe, ob $f(z) = z^2$ holomorph ist; bestimme $f'(z)$.
- Prüfe CR für $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$ und erkläre, warum es nicht holomorph ist.
- Zeige, dass $f(z) = e^{z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist.