

# Lernzettel

## Theoretische Grundlagen der Informatik

**Universität:** Technische Universität Berlin  
**Kurs/Modul:** Theoretische Grundlagen der Informatik  
**Erstellungsdatum:** September 19, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!  
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Theoretische Grundlagen der Informatik

**Lernzettel: Theoretische Grundlagen der Informatik****(1) Grundlagen: Mengen, Logik, Abbildungen, Relationen und Ordnungen.**

In der Diskreten Mathematik spielen folgende Grundbegriffe eine zentrale Rolle:

$$X \neq \emptyset, \quad A, B \subseteq X$$

- Menge: eine Sammlung eindeutig bestimmter Objekte.
- Abbildung  $f : A \rightarrow B$ : jedem Element von  $A$  wird genau ein Element von  $B$  zugeordnet.
- Relation  $R \subseteq A \times A$ : Mengenpaar-Beziehung auf  $A$ .
- Ordnung: eine spezielle Relation; Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie.

**(2) Grammatiken und Chomsky-Hierarchie.**

Formale Grammatiken  $(G = (N, \Sigma, P, S))$  erzeugen Sprachen  $L(G) \subseteq \Sigma^*$  durch Produktionsregeln  $P$ .

$N$  = Nichtterminalsymbole,  $\Sigma$  = Terminalsymbole,  $S \in N$  Startsymbol

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}$$

Chomsky-Hierarchie (Typen):

- Type-3 (regulär): Produktionen  $A \rightarrow aB$  oder  $A \rightarrow a$  (rechte Linearität möglich).
- Type-2 (kontextfrei): Produktionen  $A \rightarrow \gamma$  mit  $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$ .
- Type-1 (kontextsensitiv):  $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$  mit  $|\gamma| \geq 1$ .
- Type-0 (unbeschränkt): beliebige Produktionen  $\alpha \rightarrow \beta$  mit Mindestbedingungen.

Es gilt: Type-3  $\subset$  Type-2  $\subset$  Type-1  $\subset$  Type-0.

Beispiele:

$$G_3 : S \rightarrow aS \mid b \quad (\text{regulär})$$

$$G_2 : S \rightarrow aSb \mid \varepsilon \quad (\text{kontextfrei})$$

**(3) Endliche Automaten und Kellerautomaten.****Endliche Automaten (DFA/NFA):**

Ein DFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  besitzt  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ ; Sprache

$$L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F \}$$

Ein NFA erlaubt neben mehreren Übergängen auch  $\varepsilon$ -Übergänge.

**Kellerautomaten (PDA):**

Ein Kellerautomat  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  besitzt ein Stack-Symbol- $Z_0$  und Übergänge der Form  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ . Sprachen, die von PDA akzeptiert werden, sind genau die kontextfreien Sprachen.

**(4) Turingmaschinen.**

Eine Turingmaschine  $T = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  arbeitet auf einem endlosen Band (Alphabet

$\Gamma, \Sigma \subseteq \Gamma$  Eingabealphabet).

( $\delta$  definiert Sprünge in Abhängigkeit von gelesenen Symbolen, dem aktuellen Zustand und dem Stack der Bandposition.)

$L \subseteq \Sigma^*$  ist rekursiv, falls  $\exists T, T$  entscheidet  $L$  in endlicher Zeit.

### (5) Berechenbarkeit.

**Entscheidbarkeit** bedeutet, dass eine Turingmaschine für jedes Eingabewort in endlicher Zeit ja/nein antwortet.

**Halteproblem:** Es gibt keinen generellen Algorithmus, der für jedes Paar  $(M, w)$  entscheidet, ob die TM  $M$  auf  $w$  hält.

### (6) Komplexität.

**Zeit- und Speicherkomplexität** betrachtet das Verhalten von Algorithmen in Abhängigkeit von der Eingabelänge  $n$ .

$$\text{Zeit} \in O(f(n)), \quad \text{Speicher} \in O(g(n))$$

Wichtige Klassen:

$$P = \{L \mid \text{Es gibt eine deterministische TM, die } L \text{ in } \text{poly}(n) \text{ entscheidet}\}$$

$$NP = \{L \mid \text{Es gibt eine nondeterministische TM, die } L \text{ in } \text{poly Zeit entscheidet}\}$$

Beispiele:

P: Wortproblem für reguläre Sprachen

NP-Vollständigkeit:  $L \in NP$ , und für jedes  $L' \in NP$   $L' \leq_m L$

$P \neq NP$  (offene Frage)

Begriffe:

$$L_1 \leq_m L_2 \quad (\text{polynomielle Reduktion})$$

Reduktion :  $\exists f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*, |f(x)| \leq \text{poly}(|x|)$  so dass  $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$

### (7) Beispiele und Hinweise zu Wort- und Sprachen in der Hierarchie.

- Regular:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat gerade Länge}\}$$

*Regulärer Ausdruck* :  $(aa|ab|ba|bb)^*$ .

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$$

- Kontextfrei (aber nicht regulär):

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

*Grammatik(kontextfrei)* :

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon.$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Kontextsensitiv:

$L = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$  ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.